

# EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS EFECTOS DE ESCALA DE REYNOLDS EN UN CODO A 90°

Nicolás D. Badano<sup>a,b</sup> y Ángel N. Menéndez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Programa de Hidráulica Computacional, Laboratorio de Hidráulica Aplicada, Instituto Nacional del Agua, Ezeiza, Buenos Aires, Argentina, nicolas.d.badano@gmail.com, <http://www.ina.gob.ar/>*

<sup>b</sup>*Laboratorio de Modelación Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, <http://laboratorios.fi.uba.ar/lmm/>*

**Palabras Clave:** Efectos de Escala, Número de Reynolds, Codo.

**Resumen.** La modelación física a escala reducida es una técnica muy aplicada para diseñar, verificar y optimizar estructuras hidráulicas. No obstante, cuando los problemas a resolver tienen una combinación de elementos a superficie libre y a presión, es a menudo necesario utilizar un escalado de Froude para poder mantener a escala la fuerza de gravedad respecto de la inercia, lo que hace habitualmente imposible mantener a escala las fuerzas viscosas. Dependiendo de las condiciones del problema, estas pueden producir efectos distorsivos de importancia. En este trabajo se evalúa la posibilidad de utilizar modelos de turbulencia de tipo RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) para estudiar dichos efectos de escala numéricamente para el problema de un codo recto a 90° emplazado en una tubería rectangular con flujo completamente desarrollado. Como primera aproximación el problema se estudia en dos dimensiones. Para discriminar el origen de estos efectos de escala se distinguen los producidos localmente por las fuerzas viscosas en la zona del codo, y aquellos producidos indirectamente por acción de la viscosidad sobre capa límite aguas arriba de este, y que impactan el perfil de velocidades en la entrada.

## 1. INTRODUCCIÓN

Dada la complejidad de los fenómenos hidráulicos, el diseño, optimización y verificación de estructuras hidráulicas complejas se apoya tradicionalmente en la realización de ensayos a escala reducida en modelos físicos. Un modelo físico a escala es completamente similar a su contraparte real cuando se cumplen tres criterios: similaridad geométrica, cinemática y dinámica (Rayleigh, 1915; Yalin, 1971). En particular, esta última condición de similaridad dinámica implica que para cada fuerza actuante en cada punto del medio continuo el cociente entre su magnitud en el modelo y en el prototipo debe ser igual a una misma constante; es decir, debe existir una única escala de fuerzas. Este requerimiento es virtualmente imposible de cumplir con rigurosidad en el caso general, ya que requeriría el ensayo en un universo en miniatura (Heller, 2011), donde las propiedades del fluido y los parámetros físicos externos, como la presión atmosférica y la aceleración de la gravedad, estuvieran a escala. Esta condición podría aproximarse reemplazando el fluido del prototipo por otro y reemplazando la gravedad por una aceleración centrífuga, pero no se conocen casos en que este tipo de escalado se haya podido realizar completamente (Heller, 2011).

En la mayor parte de los casos prácticos se conservan las propiedades del fluido y se adopta con cuidado la relación entre la escala geométrica  $E_l = L_m/L_p$  y la escala de tiempo, de manera que se conserven a escala las dos fuerzas más importantes en flujos líquidos a superficie libre: la fuerza inercial y la de gravedad. Esto se conoce como escala de Froude. No obstante, todas las demás fuerzas, incluyendo las tensiones viscosas y la tensión superficial y la compresibilidad del fluido resultan fuera de escala.

Las fuerzas viscosas, que suelen ser las segundas en importancia, se caracterizan por el número de Reynolds del flujo, que mide su relación con las fuerzas inerciales. En la mayor parte de los flujos ingenieriles los números de Reynolds son muy altos, por lo que los efectos viscosos son bajos. El enfoque utilizado en la modelación física consiste entonces en adoptar una escala de modelo suficientemente grande de manera que las fuerzas fuera de escala sean de poca incidencia también en el modelo. No obstante, dado que los costos de un modelo físico escalan aproximadamente con  $E_m^{-3}$  (Le Méhauté y Hanes, 1990), normalmente se adopta una solución de compromiso y las fuerzas fuera de escala no resultan del todo despreciables. Esto genera diferencias entre los resultados del modelo físico y del prototipo, llamados efectos de escala (Ackers, 1987). El efecto distorsivo de estas fuerzas fuera de escala sobre cada una de las variables de interés del escurrimiento no es directamente cuantificable a partir de un único modelo físico.

La problemática de los efectos de escala se ha estudiado abundantemente mediante modelación física (Kobus, 1984), generalmente construyendo modelos del mismo problema en una serie de escalas. En este tipo de estudios el modelo de mayor escala toma el lugar del prototipo, y los efectos de escala se cuantifican por comparando los resultados de los demás modelos. No obstante, no puede determinarse directamente si el modelo más grande está o no afectado por efectos de escala no despreciables (Heller, 2011). Muchos estudios se enfocaron a la determinación de escalas mínimas necesarias para obtener una representación aceptable desde el punto de vista ingenieril de diversos problemas típicos, como por ejemplo descarga vertederos de cresta ancha (Hager, 1994), tirantes y aireación en resaltos hidráulicos (Hager y Bremen, 1989; Chanson, 2009), vórtices superficiales en tomas (Anwar et al., 1978), trayectoria en saltos de esquí (Heller et al., 2005), entre muchos otros. Generalmente al utilizar estas escalas mínimas solo las características principales del fenómeno se representan aceptablemente. No obstante, en determinados casos las fuerzas fuera de escala pueden ocasionar fenómenos secundarios cuyo efecto

sobre alguna de las variables de interés compita en magnitud con los producido por el fenómeno a modelar (Menéndez y Badano, 2011).

Este trabajo se desarrolla como parte de una investigación más general que busca evaluar la capacidad de la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) para analizar el impacto de los efectos de escala hidráulicos que se presentan en la modelación física de diversos casos típicos de estructuras hidráulicas.

Dado que los modelos numéricos pueden simular el efecto combinado de todas las fuerzas que intervienen tanto a escala de prototipo como de modelo físico, sin necesidad de descartar ninguna de ellas a priori, resulta tentador utilizarlos para determinar los efectos marginales de las fuerzas fuera de escala, y eventualmente poder extrapolar resultados de una escala a otra.

No obstante, existen aún desafío pendientes desde el punto de vista computacional, especialmente vinculados con la modelación de la turbulencia. Por lo tanto, para obtener un mejor grado de precisión es validar los resultados numéricos por comparación con ensayos de laboratorio. La estrategia propuesta por lo tanto, consiste en complementar ambos tipos de modelación, aprovechando las ventajas de ambas. La modelación numérica se construye en primer lugar con la misma escala reducida del modelo físico, que por lo tanto puede utilizarse para realizar la mejor calibración posible en igualdad de condiciones y validar el modelo numérico. Luego la modelación numérica se repite a escala de prototipo, de manera de corregir los problemas de escala y obtener una mejor predicción de la respuesta esperable a tamaño real (Menéndez y Badano, 2011; Menéndez et al., 2013).

Para que esta extrapolación sea válida, es necesario estudiar con detalle cómo responden los distintos tratamientos matemáticos y numéricos, por ejemplo los modelos de turbulencia, ante diversas escalas. Es importante cuantificar los errores esperables frente a resultados experimentales, y poder compararlos con efectos de escala típicos, para determinar en qué casos pueden distinguirse los efectos de escala de manera confiable. También es necesario evaluar qué tratamientos son más aptos para cada escala y qué tan confiable es alternar entre tratamientos para cada caso.

En este contexto en este trabajo se evalúa la capacidad de distintos tratamiento de tipo RANS para simular los efectos de escala viscosos en el problema de un codo recto bidimensional a 90° incorporado en un conducto. Se evaluará la compatibilidad de los resultados entre diferentes modelos de turbulencia, se describirán los efectos de la viscosidad y se identificará el origen de tales efectos.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

### 2.1. Modelo hidrodinámico

El modelo numérico utilizado se basa en el promedio de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes (RANS, por sus siglas en inglés). Suponiendo fluido incompresible monofásico, la ecuación diferencial de conservación de volumen resulta:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0, \quad (1)$$

donde  $\bar{\mathbf{U}}$  es el valor medio de Reynolds del vector velocidad. Adoptando la hipótesis de Boussinesq (1877), bajo la cual se modelan de las tensiones de Reynolds de manera isotrópica a partir de una viscosidad de torbellino  $\nu_t$ , la ecuación de conservación de cantidad de movimiento puede escribirse como (Pope, 2000):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla (\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}) - \nabla \cdot [(\nu + \nu_t) (\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T)] = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p}, \quad (2)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $\bar{p}$  es el valor medio de la presión cinemática modificada, que incorpora en el gradiente la contribución de la energía cinética de la turbulencia (Pope, 2000, p. 93):

$$\bar{p} = \bar{p} + \frac{2}{3}k, \quad (3)$$

donde  $\bar{p}$  es el valor medio de la presión cinemática y  $k$  el valor medio de la energía cinética de la turbulencia.

## 2.2. Modelos de turbulencia

En este trabajo se utilizaron modelos de turbulencia de tipo viscosidad de torbellino de la familia  $k-\epsilon$  para representar las tensiones de Reynolds. Estos modelan el efecto de la turbulencia a través de dos ecuaciones de conservación: de la energía cinética de la turbulencia  $k$  y de la tasa de disipación viscosa  $\epsilon$ .

A continuación se presentan las ecuaciones para el modelo  $k-\epsilon$  estándar (Launder y Spalding, 1974). La implementación usada contiene una modificación en el coeficiente de difusión de ambas ecuaciones, en el cual se incorpora el efecto de la viscosidad cinemática del fluido  $\nu$ . Esta es especialmente apropiada para este trabajo, ya que se quiere utilizar el modelo numérico para medir el efecto que tiene en el flujo modificar la viscosidad cinemática del fluido.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{U}k) - \nabla \cdot \left[ \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \nabla k \right] = P_k - \epsilon, \quad (4)$$

donde  $P_k$  es la tasa de producción de  $k$ , que puede calcularse a partir del flujo medio:

$$P_k = 2\nu_t \left| \frac{1}{2} (\nabla \bar{U} + \nabla \bar{U}^T) \right|^2. \quad (5)$$

La ecuación de conservación de  $\epsilon$  resulta:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{U}\epsilon) - \nabla \cdot \left[ \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \nabla \epsilon \right] = C_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\epsilon}{k} \epsilon. \quad (6)$$

A partir de estas dos cantidades puede establecerse un escala de velocidades y una escala de longitudes para los vórtices más grandes, y así calcular una viscosidad de torbellino, que resulta:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (7)$$

Las constantes del modelo estándar son:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.09, \\ C_1 &= 1.44, \\ C_2 &= 1.92, \\ \sigma_k &= 1.00, \\ \sigma_\epsilon &= 1.30. \end{aligned}$$

El  $k-\epsilon$  estándar es el modelo de turbulencia RANS más ampliamente validado y utilizado. Su desempeño es particularmente bueno en flujos confinados donde las tensiones de Reynolds

son dominantes, situación que se produce muy a muchos flujos de importancia ingenieril. Entre sus desventajas, se cita en la bibliografía un pobre desempeño en flujos no confinados, capas límites de gran curvatura y flujos rotativos. También presenta ciertas deficiencias al representar corrientes secundarias en flujos desarrollados en conductos no circulares, que se producen debido a tensiones de Reynolds anisotrópicas (Versteeg y Malalasekera, 1995).

Se utilizó en segundo lugar el modelo  $RNG\ k-\epsilon$  (Yakhot et al., 1992). Este dedujo mediante la Teoría de Grupo de Re-normalización, bajo la idea de que todas las escalas de movimiento contribuyen a la difusión de la cantidad de movimiento, en lugar de existir una única escala representativa de la turbulencia. Usando la teoría sus autores lograron deducir ecuaciones idénticas a las del modelo estándar, obteniendo nuevos coeficientes de origen teórico y una expresión que relaciona el coeficiente  $C_2$  con el tensor de deformaciones  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.0845, \\ C_1 &= 1.42, \\ C_2 &= 1.68 + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/4.38)}{1 + 0.012\eta^3}, \\ \eta &= (2\mathbf{S}_{ij}\mathbf{S}_{ij})^{1/2} k/\epsilon, \\ \sigma_k &= 0.7194, \\ \sigma_\epsilon &= 0.7194. \end{aligned}$$

Además de los modelo estándar y  $RNG\ k-\epsilon$  se evaluó también el modelo *realizable*  $k-\epsilon$  (Shih et al., 1995). Este modelo introduce un coeficiente  $C_\mu$  variable, que depende tanto del tensores de deformaciones como del tensor de rotaciones.

### 2.3. Código Numérico

Las ecuaciones de conservación se resolvieron utilizando las aplicaciones y librerías numéricas OpenFOAM® (*Open Field Operation and Manipulation*, Jasak (1996); Weller et al. (1998)). Estas aplican el *Método de los Volúmenes Finitos* sobre mallas no estructuradas de elementos poliédricos, utilizando un esquema de discretización espacial en centros de celda. La discretización temporal se realiza de manera implícita, tratando el acoplamiento presión-velocidad de un modo análogo al descrito por Rhie y Chow (1983).

Se utilizó un tratamiento iterativo hasta llegar a una condición estacionaria, resolviendo las ecuaciones de conservación mediante el método SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*, Caretto et al. (1972))

Para la discretización espacial de todos los términos advectivos y difusivos se utilizaron esquemas de segundo orden; esto es importante a fin de reducir la difusión numérica, ya que esta tiene un efecto muy similar a la difusión física que provoca la viscosidad cinemática, lo que podría distorsionar la evaluación de los efectos de escala. Para el término convectivo de  $\mathbf{U}$  se utilizó un esquema upwind de segundo orden con un limitador multidimensional, mientras que para los términos advectivos de  $k$  y  $\epsilon$  se utilizó un esquema acotado tipo van Leer.

Las simulaciones se resolvieron iterativamente hasta alcanzar residuos en todas las variables menores a al menos  $10^{-5}$ . Se monitoreó además la convergencia del valor de las variables en puntos estratégicos del dominio, ya que se observó que en algunos casos los valores de  $k$  y  $\epsilon$  pueden presentar evoluciones significativas aguas abajo del codo a pesar de tener residuos bajos.

### 3. ENSAYOS NUMÉRICOS

#### 3.1. Implementation

Como primer aproximación al problema se construyó un modelo bidimensional del codo, el cual corresponde aproximadamente a la situación de flujo en una ranura infinita. Se adoptó un ancho de conducto  $B = 1$  m y incluyó en el modelo un tramo de aproximación de una longitud igual a 10 diámetros, y un tramo posterior al codo de 30 diámetros de largo. El esquema general de la geometría del modelo, así como el origen de coordenadas adoptado, se presenta en la Figura 1.

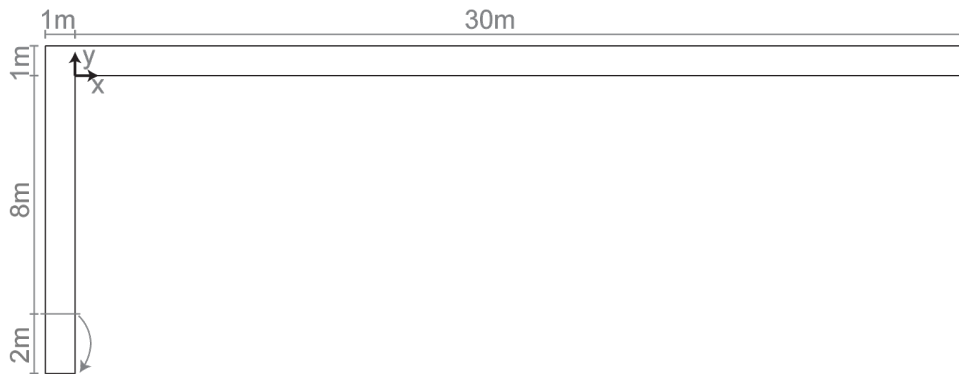


Figura 1: Geometría del modelo bidimensional del codo a 90°.

El dominio se discretizó mediante una grilla de cálculo base de cuadrados, alineados con los ejes coordenados. El tamaño de lado para estos en la mayor parte de los ensayos se adoptó igual a  $dx = B/100$ . Por eficiencia, y dada la escasa magnitud de los gradientes longitudinales, para la zona de la geometría más alejada del codo (más allá de una distancia  $2B$  antes de este y una distancia  $5B$  después) se utilizaron elementos rectangulares con una proporción longitudinal/trasversal de 4. La malla fue refinada transversalmente cerca de las paredes como se describe más adelante.

El modelo se forzó con condiciones de borde de Dirichlet para las cantidades advectadas,  $U$ ,  $k$  y  $\epsilon$ , en el borde de entrada y para la presión en el borde de salida. Los valores en el borde de entrada, tanto de la velocidad como de los parámetros de la turbulencia  $k$  y  $\epsilon$  se muestrearon en cada iteración de un plano ubicado 2 m dentro del dominio. De esta manera se logró simular condiciones de flujo entrante completamente desarrollado con un costo computacional reducido. A fin de mejorar la convergencia del modelo las velocidades en la entrada se corrigieron en todo momento de manera de mantener la velocidad media adoptada para los ensayos, que en todos los casos fue igual a  $\bar{U} = 5$  m/s. Para la presión en el borde de entrada y las demás variables en el borde de salida se adoptaron condiciones de borde de gradiente normal nulo.

Para las paredes sólidas se utilizó un tratamiento mediante funciones de pared. Dado que el espesor de la capa límite es muy variable para distintos números de Reynolds se optó por utilizar para la velocidad la función de pared de Spalding, que provee un buen ajuste del perfil de velocidades cerca de la pared e el intervalo de  $y^+$  de entre 0 y aproximadamente 500. el ajuste de Spalding puede escribirse como:

$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E} \left[ e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - 0,5(\kappa u^+)^2 - \frac{1}{6}(\kappa u^+)^3 \right]. \quad (8)$$

Para la condición de borde de  $k$  se adoptó un gradiente normal a la pared nulo, mientras que

el valor de  $\epsilon$  se fijó según la ecuación:

$$\epsilon = C_{\mu}^{0,75} \frac{k^{1,5}}{\kappa y} . \quad (9)$$

Ambas condiciones se derivan de considerar que cerca de la pared la energía cinética de la turbulencia es uniforme, lo que indica que la tasa de producción y disipación son aproximadamente iguales (Versteeg y Malalasekera, 1995). Esta afirmación es solo estrictamente válida dentro de la sub-capa viscosa, es decir en un rango de entre  $y^+$  de entre 300 y aproximadamente 500. Por lo tanto, más allá de que la función de pared permite dar condiciones de borde correctas a la velocidad para valores de  $y^+$  menores a 30, las condiciones de borde de  $k$  y  $\epsilon$  no resultan muy precisas en ese intervalo.

Para los ensayos con números de Reynolds más altos, la distancia  $y^+$  del primer nodo de la malla base resultaría por exceso fuera de la capa inercial. Por lo tanto, en estos casos los elementos de borde se subdividieron sucesivamente hasta obtener una distancia adimensional del primer nodo de aproximadamente 50. La subdivisión se realizó de modo que la relación entre espesores de elementos consecutivos fuera de 1.75. Para los Reynolds más bajos la subdivisión no fue necesaria, e incluso los primeros nodos de la malla base cayeron algo por debajo del límite inferior de la sub-capa inercial. No obstante, se verificó mediante la comparación de diferentes mallas de cálculo que los resultados en estos casos fueron insensibles a variaciones en el  $y^+$  del primer nodo.

A fin de obtener distintos números de Reynolds para los distintos casos se modificó en cada uno la viscosidad cinemática del fluido, manteniendo tanto las dimensiones del modelo como las velocidades inalteradas. Esto es matemáticamente equivalente a variar las dimensiones del modelo y la velocidad y mantener constante la viscosidad, que es lo que se haría en un ensayo de modelo físico, pero resulta más sencillo de implementar computacionalmente. El número de Reynolds para este problema se definió como:

$$Rr = \frac{\bar{U}B}{\nu} . \quad (10)$$

### 3.2. Resultados

En la Figura 2 se presenta el campo del módulo de la velocidad normalizado para un caso intermedio de  $Rr = 1 \times 10^5$ , corrido para el modelo  $k-\epsilon$  estándar. Se observa que en la aproximación, por efecto de la capa límite, las máximas velocidades se encuentran en el centro del conducto, y son aproximadamente 10 % superiores a la velocidad media. Por efecto de la inercia, el codo produce que las velocidades se concentren en el tercio exterior del conducto de salida, alcanzando un valor pico de aproximadamente el doble de la velocidad media. Sobre la cara interna del conducto de salida se forma una zona de separación de unos 4 diámetros de longitud. Por efecto combinado de la viscosidad cinemática y de torbellino las velocidades difunden luego hasta recuperar la distribución original, aunque el efecto del codo puede observarse aún a gran distancia aguas abajo, la cual crece con el número de Reynolds.

En adelante se presentaran los resultados de la velocidad a través de perfiles trasversales en distintas zonas representativas, que también se indican en la Figura 2. El perfil A corresponde a  $y = -2B$ , el perfil B a  $y = 0$ , el perfil C a  $x = 0,5B$ , D a  $x = 2B$ , el perfil E a  $y = 5B$  y el perfil F a  $y = 10B$ .

A fin de asegurar que los resultados calculados son independientes de la malla y que estos no se encuentran distorsionados por la viscosidad numérica, se realizó el estudio de la convergencia

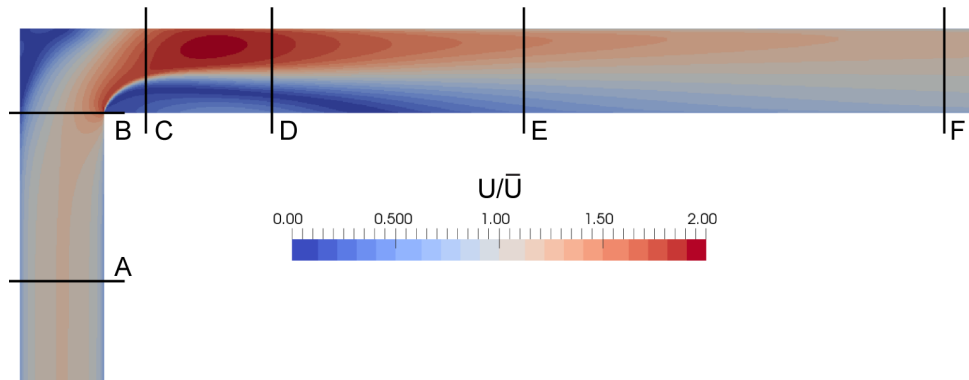


Figura 2: Campo del módulo de la velocidad normalizado para  $Re = 10^5$ .

de malla para el caso de  $Re = 10^6$ . Se repitió el caso para mallas base con  $dx = B/50$ ,  $dx = B/100$  y  $dx = B/200$ . En todos los casos la celdas cercanas a la pared fueron refinadas hasta aproximadamente el mismo valor de  $y^+$ . Los resultados de velocidad para los perfiles C y D, que son los que presentan mayores diferencias, se presentan en la Figura 3.

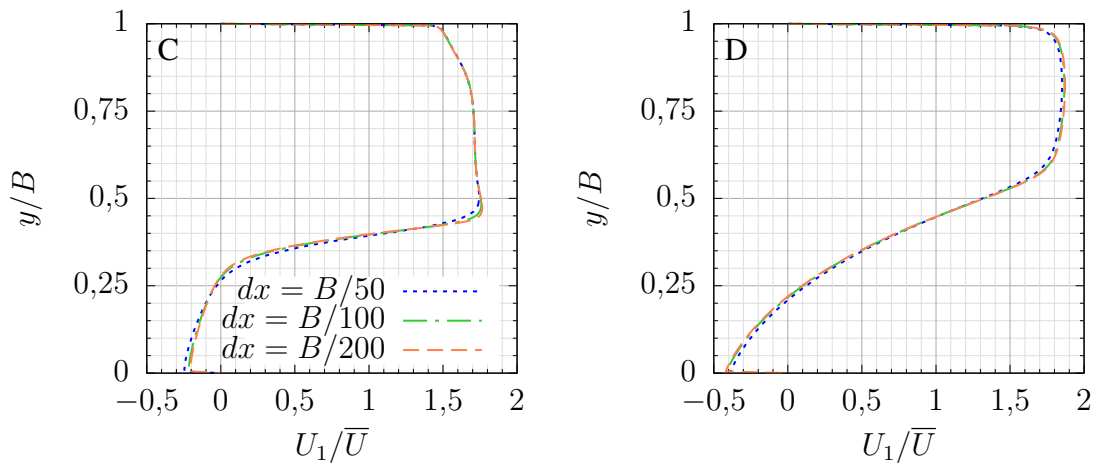


Figura 3: Perfiles de velocidad C y D para  $Re = 10^6$  para distintos tamaños de malla, modelo  $k-\epsilon$  estándar.

Se observa que las diferencias entre las tres discretizaciones son bajas. Al pasar de  $dx = B/50$  a  $dx = B/100$  se observan diferencias locales máximas del orden de 5% de  $\bar{U}$ . Las diferencias caen por debajo del 1% de  $\bar{U}$  al pasar de  $dx = B/100$  a  $dx = B/200$ , el cual se nivel de error tolerable para estos ensayos. Como consecuencia se optó por realizar el resto de los ensayos con mallas de  $dx = B/100$ .

A continuación se realizaron las simulaciones variando la viscosidad cinemática para obtener distintos números de Reynolds. En concreto se simularon valores de  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$  y  $10^7$ . Los resultados en los perfiles A a F para el modelo estándar se presentan en la Figura 4, para el modelo RNG en la Figura 5 y para el modelo *realizable* en la Figura 6.

Para el caso del modelo estándar, se observa que los perfiles de velocidad muestran una sensibilidad sistemática al número de Reynolds, especialmente en los perfiles A, B y E. El efecto de la viscosidad se muestra muy marcado en el perfil desarrollado observado antes del codo, que como se esperable, presenta mayores velocidades en el centro del conducto a menor  $Re$ . Esta mayor concentración de las velocidades produce un efecto sobre el perfil C, ubicado en



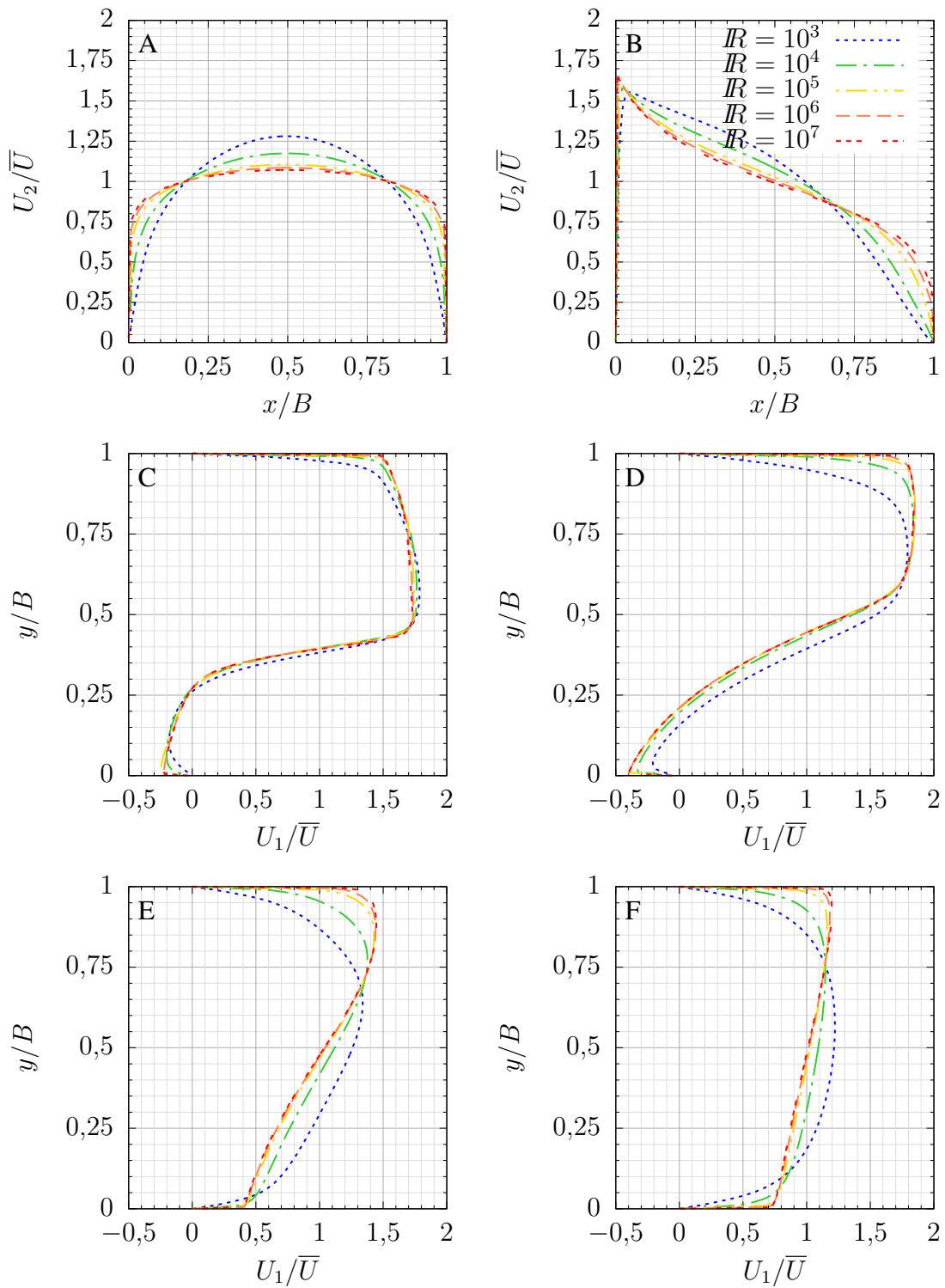


Figura 4: Perfiles de velocidad A a F para distintos  $Re$ , modelo  $k-\epsilon$  estándar.

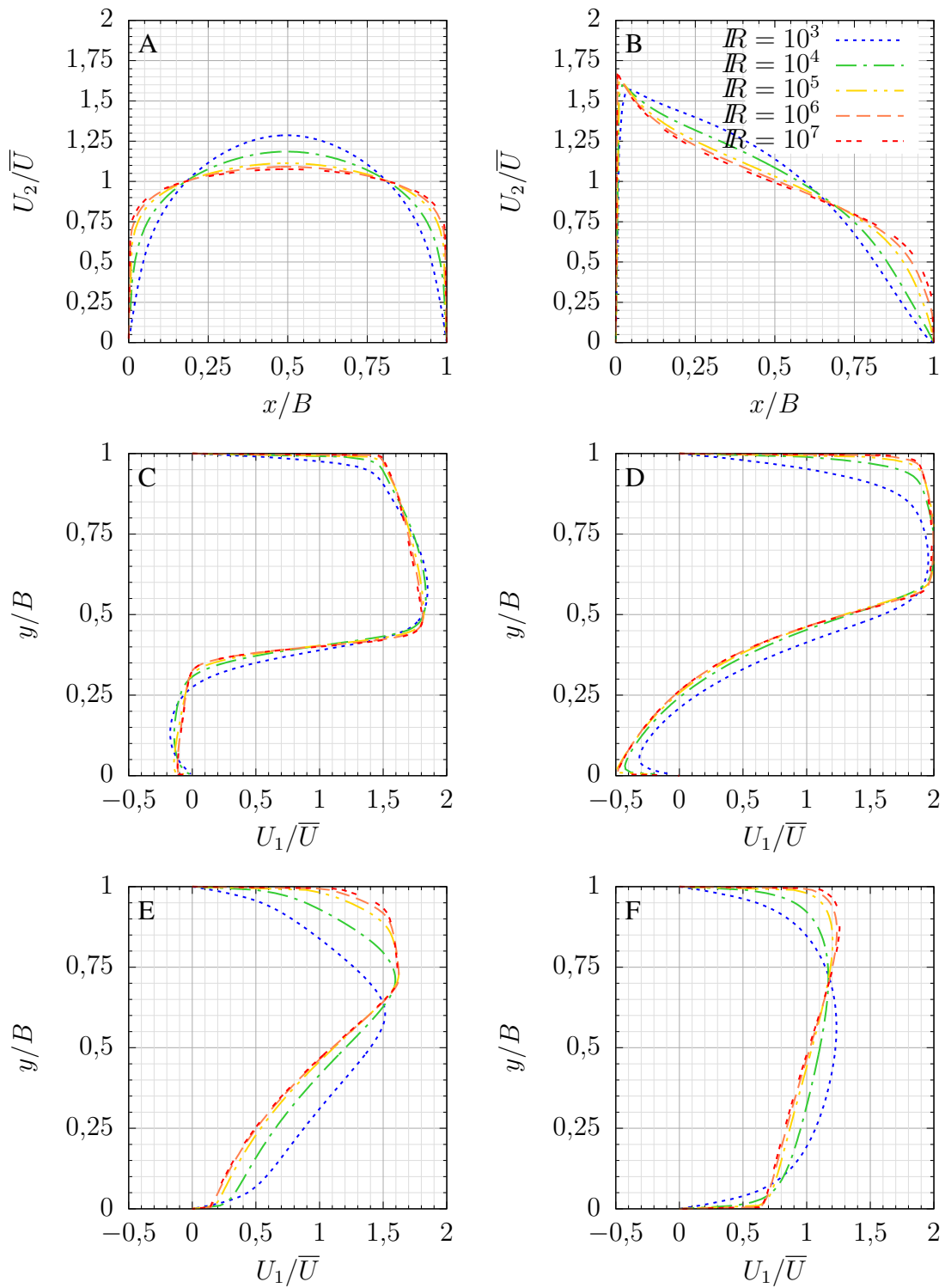


Figura 5: Perfiles de velocidad A a F para distintos  $R$ , modelo RNG  $k-\epsilon$ .

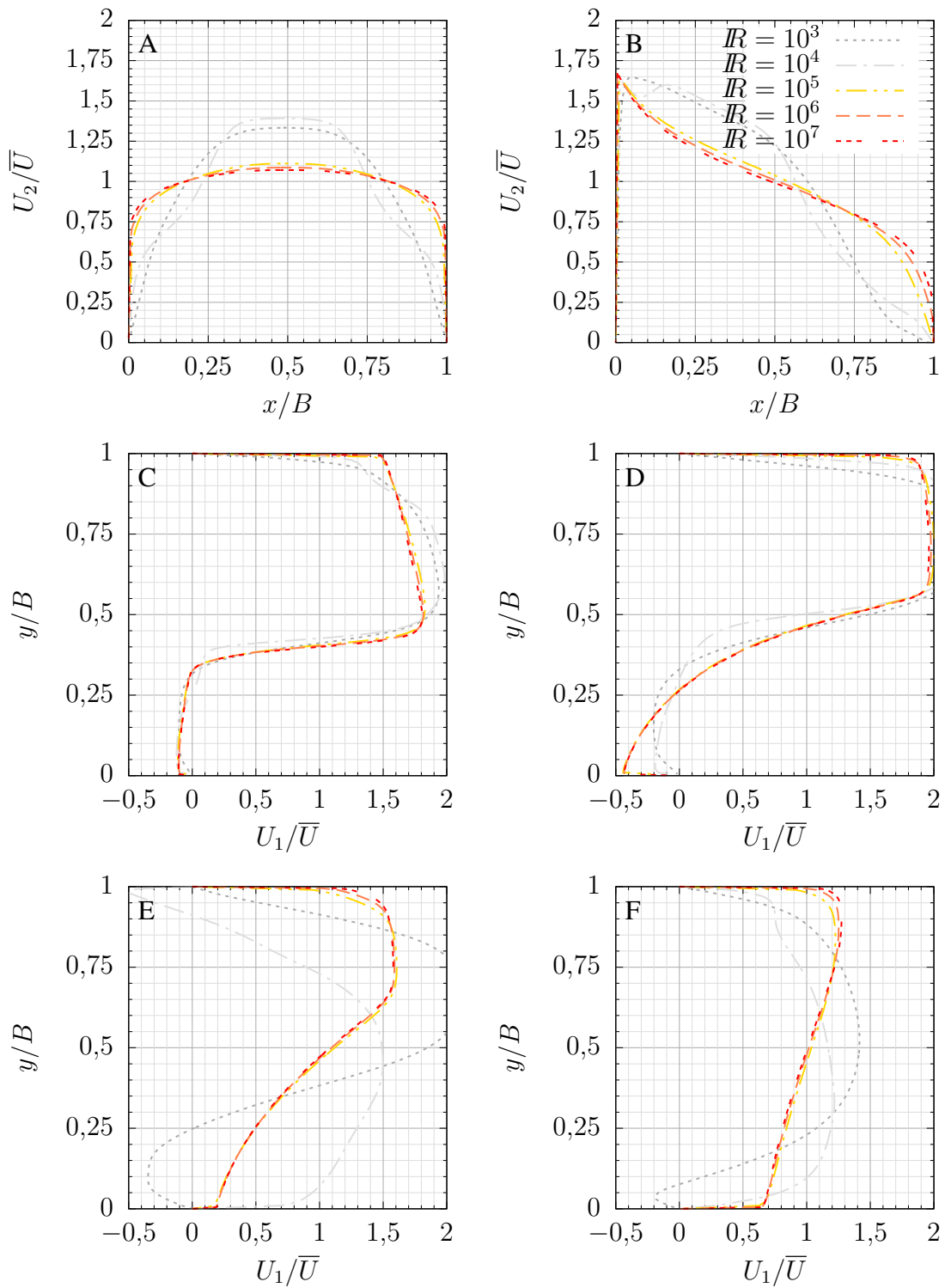


Figura 6: Perfiles de velocidad A a F para distintos  $R$ , modelo *realizable*  $k-\epsilon$ .

la zona de mayor contracción; a menor número de Reynolds el punto del máximo del perfil se mueve hacia la cara exterior del conducto. Para  $Re = 10^7$  el máximo en ese perfil se alcanza en  $y/B = 0,47$ , mientras que para  $Re = 10^3$  se encuentra en  $y/B = 0,60$ . Se observa separación de la capa límite en los perfiles  $C$  y  $D$  para todos los números de Reynolds. También se observa en los perfiles  $E$  y  $F$  que a menor  $Re$  los perfiles tienden más rápidamente por el efecto de la capa límite a reducir el pico observado sobre el borde exterior.

Para el caso del modelo *RNG* se observa un efecto cualitativamente similar del número de Reynolds, tanto en la entrada del codo, como en la zona de separación y en el conducto de salida. No obstante, es importante tener en cuenta que al comparar los perfiles  $C$ ,  $D$  y  $E$  se observan diferencias claras entre los resultados de ambos modelos de turbulencia, que compiten en magnitud con el propio efecto de escala. Esto es indicativo de las dificultades que aún existen para representar el problema de la turbulencia, por lo menos desde el punto de vista de los modelos RANS. En particular el modelo *RNG* predice una capa límite interior entre la zona de concentración de velocidades y la zona de separación mucho más abrupta, con menor intercambio de cantidad de movimiento.

En el caso del modelo *realizable* se encontraron graves problemas de convergencia para los números de  $Re < 10^5$ . A pesar de la utilización de técnicas de relajación se observó el desarrollo de oscilaciones en la solución y no fue posible alcanzar valores suficientemente pequeños de los residuos. Se encontraron incluso dificultades para representar el flujo desarrollado previo al codo, que mostró una concentración. Esos resultados por lo tanto no proveen información útil sobre el efecto de Reynolds. Cabe destacarse que estos problemas eran esperables, ya que la pretensión al desarrollar el modelo *realizable*  $k-\epsilon$  fue obtener mejores resultados a números altos de Reynolds (Shih et al., 1995). En cuanto a los resultados para  $Re \geq 10^5$ , estos muestran un acuerdo excelente con los del modelo *RNG*, para todos los números de Reynolds. Solo se observan algunas pequeñas diferencias en la cercanía de ambas paredes en los perfiles  $D$ ,  $E$  y  $F$ .

El hecho de que los modelos *realizable* y *RNG* hayan arrojado resultados similares, y que ambos se consideren superadores del modelo estándar, indicaría que estos resultados podrían ser considerados a priori más precisos que los arrojados por el modelo estándar. No obstante, sería necesaria la comparación con resultados experimentales para poder tener mayor una certidumbre.

A continuación se realizó un ensayo a fin de distinguir en qué medida los efectos de escala viscosos observados responden a la incidencia del perfil de velocidades en la entrada del codo y en qué otra corresponden al propio efecto de la viscosidad actuando frente a los gradientes de velocidad producidos por el codo. A ese fin se construyó un modelo similar pero incluyendo condiciones de borde de libre deslizamiento en las paredes. De esta manera se evita la formación de la capa límite, y se obtiene un perfil de velocidades en la entrada prácticamente constante e independiente del número de Reynolds.

Un problema adicional a resolver en este caso es que es indispensable dar condiciones de borde de Dirichlet en la entrada a los parámetros turbulentos, ya que no pueden alcanzarse condiciones de equilibrio al no existir capa límite. En este trabajo se optó por adoptar condiciones correspondientes a flujo libre, adoptando un nivel de agitación  $I$  en función del número de Reynolds, y estimando a partir de estos valores para  $k$  y  $\epsilon$ . Este procedimiento se describe por ejemplo en Badano y Menéndez (2014).

Los resultados con libre deslizamiento para el modelo *RNG*  $k-\epsilon$  se presentan en la Figura 7, comparados con los del modelo con capa límite. Se observa que la magnitud de los efectos de escala es sistemáticamente más baja en el caso de libre deslizamiento, en el que solo los casos de  $Re < 10^4$  muestran cierto apartamiento respecto de los Reynolds más altos. En particular

no se observan diferencias para los Reynolds más altos en la posición ni la magnitud de los máximos.

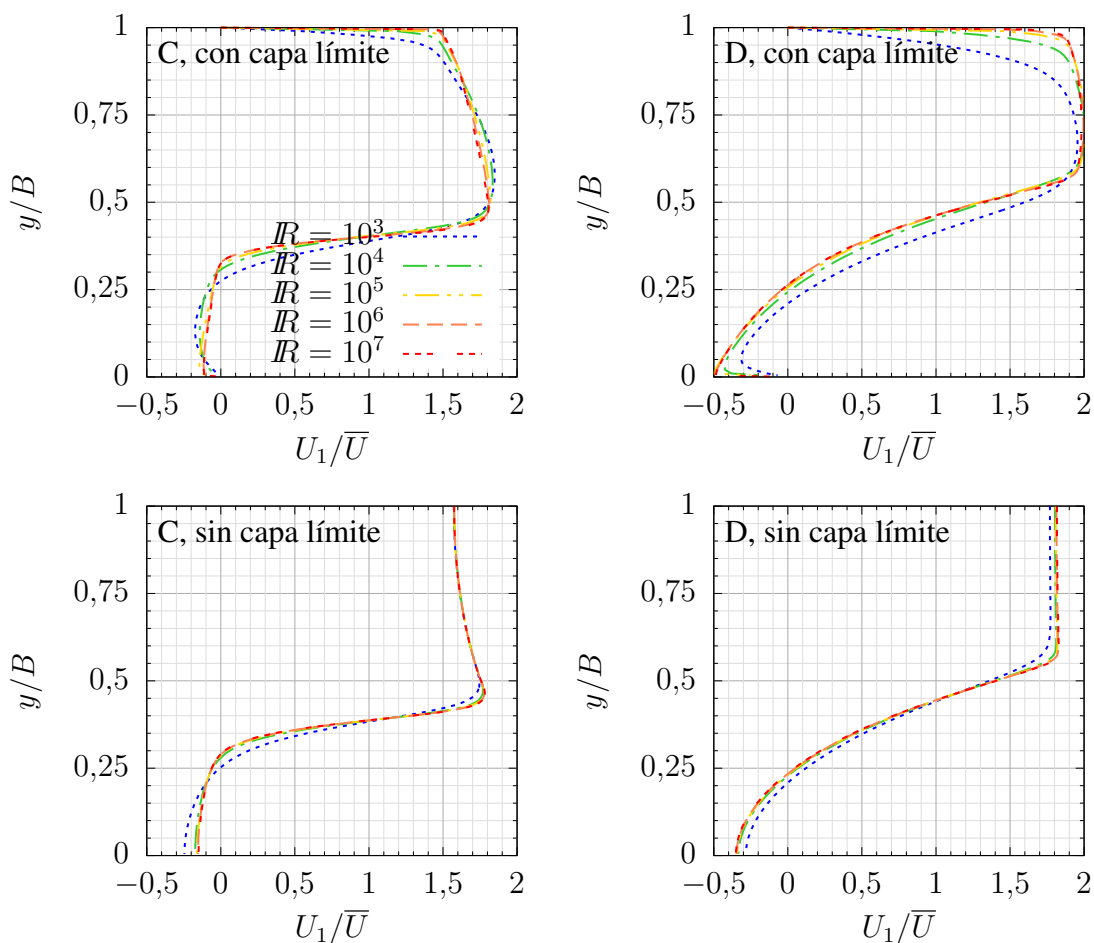


Figura 7: Comparación de los perfiles de velocidad  $C$  y  $D$  para distintos  $Re$ , modelo  $RNG\ k-\epsilon$ , con efecto de la capa límite (arriba) y sin efecto de la capa límite (abajo).

A raíz de este experimento queda claro que los efectos de escala viscosos observados en el codo se deben principalmente a la influencia de la viscosidad sobre la capa límite en el conducto de entrada. Esto resulta interesante, ya que el efecto difícilmente es evitable en cualquier problema en que la entrada a un componente hidráulico singular se encuentre precedido por un tramo de conducto hidráulicamente liso.

#### 4. CONCLUSIONES

Se simuló mediante tratamiento RANS y diversos modelos de turbulencia el problema de un codo bidimensional a  $90^\circ$  situado en un conducto con flujo desarrollado, determinando el efecto de las fuerzas viscosas a diferentes números de Reynolds. Se observó que todos los modelos de turbulencia predicen efectos de escala similares. No obstante, la diferencia entre los resultados predichos a igual Reynolds por el modelo  $k-\epsilon$  estándar y los demás es significativa, y excede la magnitud de los propios efectos de escala. Esto plantea la necesidad de poder validar las predicciones de los modelos de turbulencia por comparación con resultados experimentales a fin de poder determinar cual de los modelos representa mejor el flujo para este problema.

En principio, y dado que no se cuenta por el momento con datos de laboratorio para dicha validación, se considera que los resultados calculados mediante el modelo  $RNG\ k-\epsilon$  podrían ofrecer el mejor pronóstico, dado que coinciden con bastante aproximación a los del modelo *realizable*  $k-\epsilon$  para los números de Reynolds en que pudieron obtenerse resultados para ambos.

Se realizó también un ensayo eliminando el efecto de la capa límite externa para evaluar en qué medida los efectos de escala observados son producto del perfil de velocidades del flujo desarrollado en el conducto. Este ensayo mostró efectos de escala sustancialmente más bajos que los del primer caso, permitiendo concluir que la distribución de velocidades a la entrada del codo son la principal causa de los efectos de escala observados.

## REFERENCIAS

- Ackers P. Scale models. examples of how, why and when - with some ifs and buts. En *Proc. of Technical Session B, XXII IAHR Congress*. Lausanne, Switzerland, 1987.
- Anwar H., Weller J., y Amphlett M. Similarity of free-vortex at horizontal intake. *Journal of Hydraulic Research*, 16:95–105, 1978.
- Badano N. y Menéndez A. Evaluación de metodologías para la modelación reynolds-averaged navier-stokes (rans) de la capa límite en conductos circulares. Bariloche, Argentina, 2014.
- Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, 23:1–680, 1877.
- Caretto L., Gosman A., Pantakar S., y Spalding D. Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation. Paris, 1972.
- Chanson H. Turbulent air-water flows in hydraulic structures: Dynamic similarity and scale effects. *Environmental Fluid Mechanics*, 9:125–142, 2009.
- Hager W. Breitröner Überfall (vertederos de cresta ancha). *Wasser Energie Luft*, 86:363–369, 1994.
- Hager W. y Bremen R. Classical hydraulic jump: Sequent depths. *Journal of Hydraulic Research*, 27:565–585, 1989.
- Heller V. Scale effects in physical hydraulic engineering models. *Journal of Hydraulic Research*, 49:293–306, 2011.
- Heller V., Hager W., y Minor H. Ski jump hydraulics. *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*, 131:347–355, 2005.
- Jasak H. *Error Analysis and Estimation for Finite Volume Method with Applications to Fluids Flow*. Tesis de Doctorado, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 1996.
- Kobus H., editor. *Proc. of the Symposium on scale effects in modelling hydraulic structures*. IAHR, Esslingen, Germany, 1984.
- Launder B. y Spalding D. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3:537–566, 1974.
- Le Méhauté B. y Hanes D. *Ocean engineering science, the sea. B.*, capítulo 29, Similitude, páginas 955–980. Wiley, New York, 1990.
- Menéndez A. y Badano N. Interaction between hydraulic and numerical models for the design of hydraulic structures. 2011. 978-953-307-893-9.
- Menéndez A., Badano N., y Lecertua E. A strategy for the interaction between hydraulic and numerical models. Chengdu, China, 2013.
- Pope S. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- Rayleigh L. The principle of similitude. *Nature*, 95:181–196, 1915.
- Rhie C. y Chow W. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing

- edge separation. *AIAA Journal*, 21:1525–1532, 1983.
- Shih T., Liou W., Shabbir A., y Tang Z. A new k-epsilon eddy viscosity model for high reynolds number turbulent flows. *Computers and Fluids*, 24:227–238, 1995.
- Versteeg H. y Malalasekera W. *An introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite volume method*. Longman Scientific & Technical, first edición, 1995.
- Weller H., Tabor G., Jasak H., y Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object orientated techniques. *Computers in Physics*, 12:620–631, 1998.
- Yakhot V., Orszag S., Thangam S., Gatski T., y Speziale C. Development of turbulence models for shear flow by a double expansion technique. *Physics of Fluids A*, 4:1510–1520, 1992.
- Yalin M. *Theory of hydraulic models*. Macmillan, London, 1971.