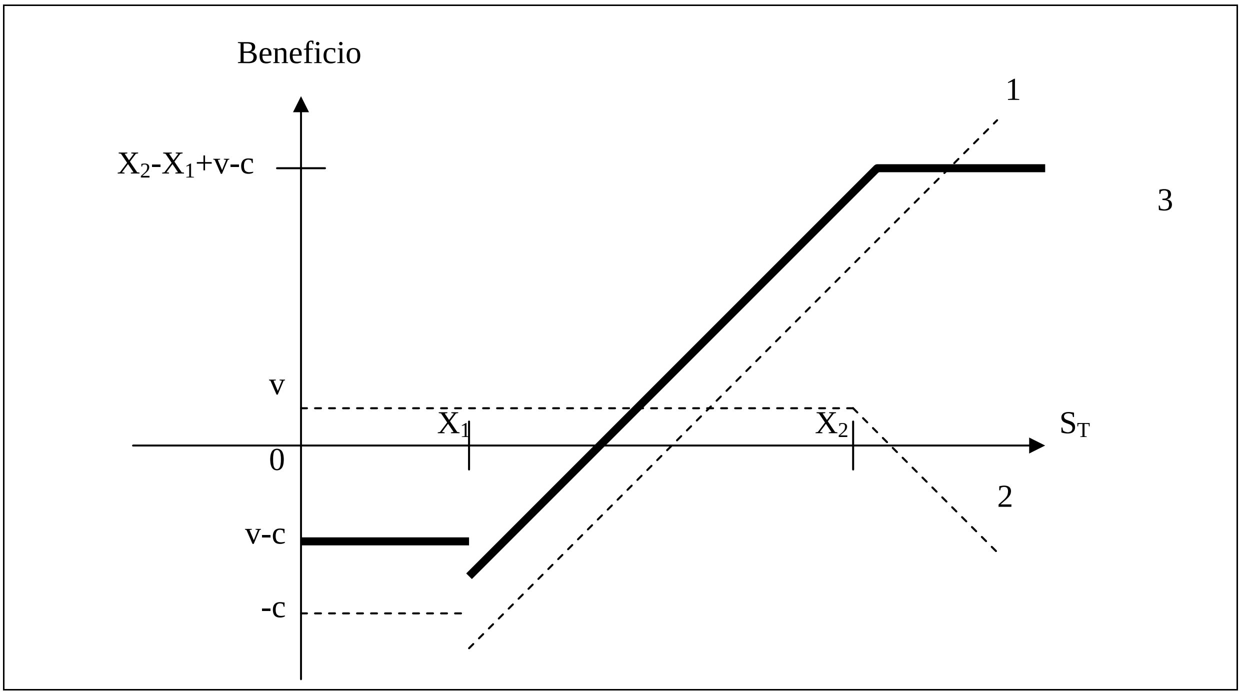
MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA VALORACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS



Laboratorio de Modelación Matemática
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

Informe FIUBA-LMM RA01-01-2004

Julio, 2004

LABORATORIO DE MODELACION MATEMATICA

DEPARTAMENTO DE HIDRAULICA

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

DIRECTOR DEL LMM:

Dr. Angel N. Menéndez

EQUIPO DE TRABAJO

Dr. Carlos E. Laciana
Dr. Angel N. Menéndez

INFORME PRODUCIDO POR

Dr. Carlos E. Laciana

MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA VALORACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS

Resumen

Se presentan de manera didáctica los derivados financieros conocidos como opciones. Se introducen los modelos de valoración conocidos como binomial y de Black-Scholes, mostrando su equivalencia en el límite al continuo. También son explicadas las principales estrategias finacieras con opciones (spreads), las cuales permiten establecer coberturas para el manejo del riesgo asociado a la volatilidad de los activos. Se da una idea somera del cálculo de la volatilidad implícita y su relación con el modelo de Black-Scholes. Es resaltada la analogía entre los procesos estocásticos relacionados a la volatilidad y los procesos físicos tales como el movimiento Browniano.

MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA VALORACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS

<u>INDICE</u>

1. OBJETIVO Y PLAN

El principal objetivo del presente artículo es mostrar la conexión que existe entre modelos físico-matemáticos de uso corriente y su aplicación a problemas de gran utilidad en las finanzas, relacionados con la minimización de los riesgos de inversión junto a la maximización de las posibilidades para obtener beneficios. Nos centraremos en la utilización del derivado financiero conocido como opción, el cual es de gran uso en los mercados financieros norteamericanos y europeos. La aplicación de este instrumento requiere de la utilización de modelos matemáticos basados principalmente en el empleo de métodos estadísticos inspirados en ciertos procesos físicos. Sin embargo esta presentación está dirigida a toda persona, con un nivel básico de análisis matemático y estadística, interesada en conocer los alcances de esta herramienta financiera. De allí que se haya puesto el énfasis en dar una mirada general e introductoria y no en desarrollar a fondo un tema específico, como podría ser por ejemplo el de la volatilidad el cual daría pie, por si sólo, para más de un artículo.

El plan seguido es el siguiente: en la sección 2. se introduce la noción de opción describiendo los distintos tipos; en 3. se hace un análisis cualitativo de los principales factores que afectan el valor de una opción; en 4. se presentan los modelos de valoración de opciones conocidos como *Binomial* y de *Black-Scholes*; en 5. se introducen los métodos para el cálculo de la volatilidad histórica e implícita; en 6. se dan ejemplos de las estrategias financieras con opciones (spreads) más usadas; finalmente en la sección 7 se hacen comentarios de lineas de investigación para la mejora de los modelos existentes.

2. ¿QUÉ ES UNA OPCIÓN?

Una opción se puede definir como un contrato que da derecho a quien lo posee a comprar o vender un activo a un precio preestablecido durante un período o una fecha determinada.

En este tipo de acuerdos tenemos dos clases de operadores, los compradores y los vendedores de opciones. Como lo destaca P. Lamothe [1] las posiciones del comprador y el vendedor son asimétricas, dado que el comprador, mediante el pago de una prima, adquiere un derecho (que puede ejercer o no según le convenga) mientras que el vendedor adquiere una obligación que es compensada mediante el cobro de la prima.

En lo que sigue llamaremos: S al precio del subyacente (o también llamado precio de stock) o sea el activo sobre el cual se ejerce la opción; X al precio establecido en el contrato para la compra o venta del activo acordado, al mismo se lo llama precio de ejercicio; T al tiempo de expiración de la opción; S_T al precio del subyacente al tiempo de expiración.

Existen dos modalidades principalmente de opciones las **europeas** y las **americanas**, las primeras pueden ser ejercidas sólo al tiempo de expiración, mientras que las segundas en cualquier instante hasta la expiración, en este artículo nos referiremos por simplicidad principalmente a las primeras, ya que además, gran parte de los modelos y análisis realizados para opciones europeas son de utilidad para americanas.

Hay dos tipos de opciones:

1) **Opciones CALL**: son opciones para la **compra** de partidas de un determinado activo. En el contrato se establece el tiempo de expiración T y el precio de ejercicio X (aquel al cual se adquiere la partida).
2) **Opciones PUT**: son opciones para la **venta** de partidas de un activo.

Los contratos de opciones permiten cubrirse de posibles pérdidas frente a cambios inesperados en los precios del subyacente. El gráfico de la figura 1 permite mostrar la relación entre beneficio y precio de subyacente al tiempo de expiración (S_T) para una opción europea tipo CALL.

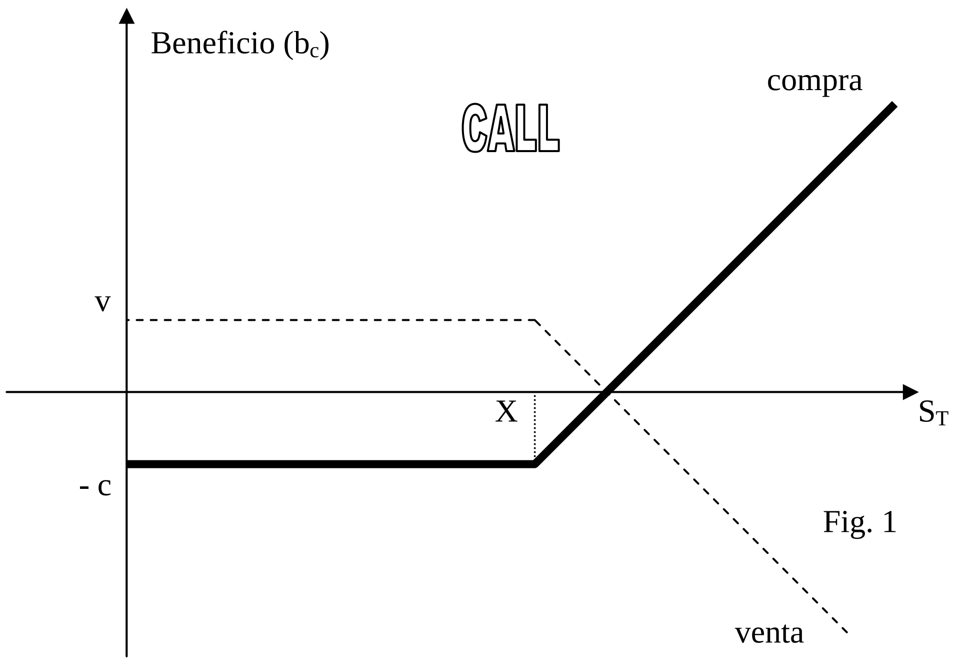


Fig. 1

Donde "c" representa el precio de compra o prima de la opción CALL y "v" el valor de venta.

Si al tiempo T resulta S_T>X, como la opción da derecho a comprar al precio de ejercicio, la misma es ejercida obteniendo un beneficio de S_T - X – c, ya que al mismo tiempo que compramos a X ejerciendo la opción podemos vender al precio de mercado S_T. Para S_T entre X y el punto de corte, como se ve del gráfico, el beneficio resulta negativo (pérdida) sin embargo conviene ejercerla por que nos da una pérdida menor que el valor de la prima. La ganancia en realidad puede ser mayor si se tiene en cuenta que la cantidad X sería pagada al tiempo T, luego X puede provenir de un capital menor puesto a cierta tasa de interés al momento de la firma del contrato. Si por otro lado resulta S_T<X la opción no conviene ejercerla, perdiendo en ese caso el valor de la prima. De allí que podamos expresar el beneficio de una opción call mediante la fórmula

$$b_c = \text{máx}[0, S_T - X] - c$$

Para la venta de una CALL la curva b_c vs S_T es la indicada con lineas de puntos en fig. 1, como se ve es simétrica a la de compra y el beneficio entonces viene dado por

$$b_c^* = v - \text{máx}[0, S_T - X]$$

Esto es aún muy esquemático, en el cálculo real debemos tener en cuenta que ni bien se firma el contrato el vendedor de la opción puede poner, el dinero recibido de la prima, a cierta tasa de interés de manera que al tiempo de ejercicio posea un capital incrementado. De cualquier manera está claro que al vendedor le conviene que no se ejerza la opción.

El gráfico siguiente corresponde a una opción PUT:

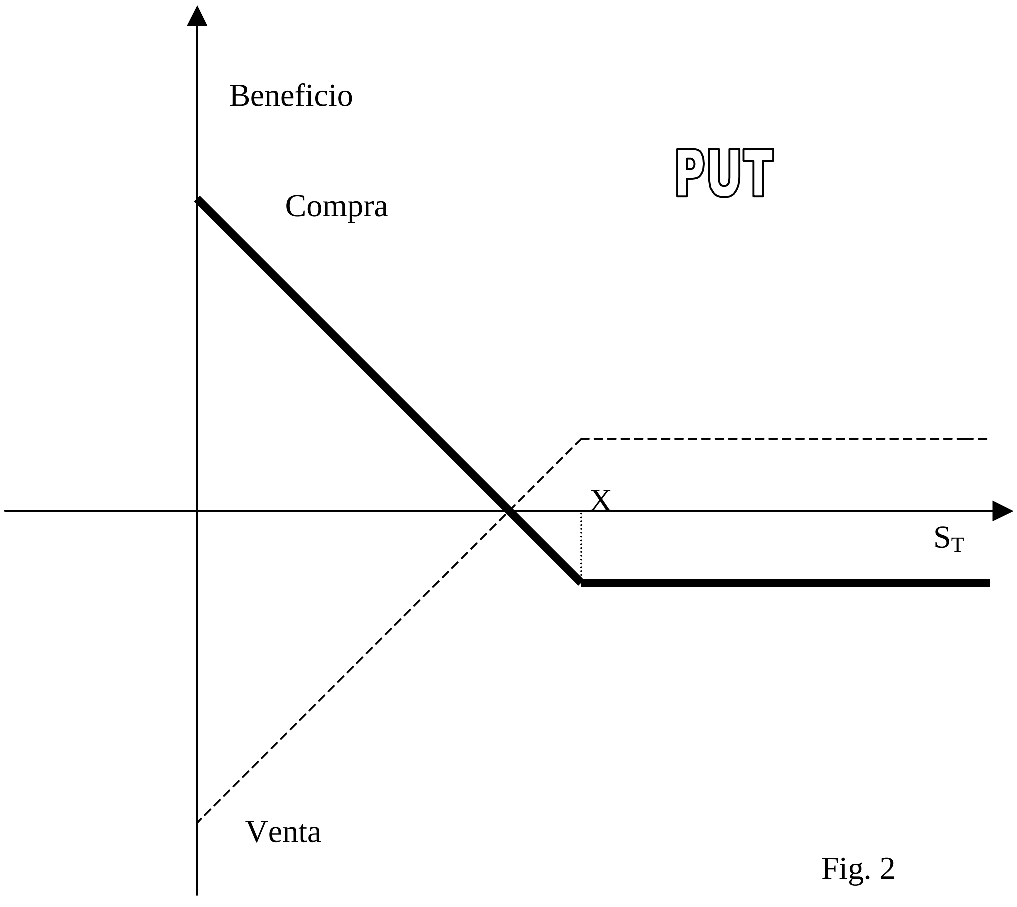


Fig. 2

Como se trata de la venta de un activo, si el precio en el mercado al momento del ejercicio es menor que el acordado entones conviene ejercer, obteniendo un beneficio de $X - S_T - p$, donde con "p" indicamos el precio de la PUT. La fórmula del beneficio al comprar una PUT es entonces:

$$b_p = \text{máx}[0, X - S_T] - p$$

y para la venta de una PUT:

$$b_p^* = v - \text{máx}[0, X - S_T]$$

El interés en comprar o vender opciones de determinado activo dependerá de las expectativas acerca de la evolución del precio de dicho activo, luego una pregunta que debemos responder es ¿cómo estimar razonablemente la evolución del precio del subyacente?, además también tenemos que preguntarnos ¿hasta cuanto conviene pagar por la opción?. Analizaremos primeramente en forma cualitativa los factores que afectan el valor de una opción.

3 ¿QUÉ FACTORES DETERMINAN EL VALOR DE UNA OPCIÓN?

Siguiendo a la ref. [1] podemos descomponer el valor de la opción en la suma de dos componentes: una parte llamada *intrínseca* y otra *extrínseca*. La primera puede definirse como “el valor que tendría una opción en un momento determinado si se ejerciese inmediatamente”. Así para una opción CALL será

$$c_I = \text{máx}[0, S - X]$$

y para la PUT es

$$p_I = \text{máx}[0, X - S]$$

donde S es el precio del subyacente al momento del ejercicio y X el precio de ejercicio. La parte *extrínseca* del valor de la opción es lo que le agrega el vendedor para cubrirse de una alteración en los precios que le pueda infringir una pérdida mayor cuando el comprador la ejerza. De las expresiones para c_I y p_I vemos que un aumento en el **precio del subyacente** (S) aumenta el valor intrínseco para las CALL y diminuye para las PUT. La **volatilidad** es otra variable importante, la misma como veremos es proporcional a la desviación standard en los precios del subyacente, cuanto mayor sea mayor será el rango de precios y mayor la chance de ejercer la opción, con lo cual aumenta el valor tanto para la CALL como para la PUT, dado que implica un riesgo mayor para los vendedores. Cuando el subyacente se trata de acciones que pagan **dividendos**, como esto hace que disminuya el precio del subyacente, ello afectará negativamente a las CALL y positivamente a las PUT. Con el **tipo de interés** también se ve afectado el valor ya que con un aumento de la tasa para el mismo período, como la CALL es un derecho de compra aplazada el valor actual del precio de ejercicio será menor, favoreciendo al comprador de CALL, con lo cual el valor de la CALL aumenta y al contrario para la PUT. Con el **plazo de expiración** aumenta la incertidumbre en cuanto al valor final de S, con lo cual los riesgos del vendedor son mayores y por lo tanto aumenta el valor extrínseco de la opción. Finalmente el aumento del **precio de ejercicio** influye de manera obvia (basta ver como se modifica el valor intrínseco) en el valor de la opción haciendo que disminuya para la CALL y aumente para la PUT. En el siguiente cuadro se resume como influye cualitativamente el aumento de los factores nombrados sobre el valor (o primas) de las CALL y PUT:

Factor	CALL	PUT
Precio del subyacente ⇧	⇧	⇩
Volatilidad ⇧	⇧	⇧
Pago de dividendos ⇧	⇩	⇧
Tasa de interés ⇧	⇧	⇩
Plazo de expiración ⇧	⇧	⇧
Precio de ejercicio ⇧	⇩	⇧

Vamos a ver ahora como hallar expresiones cuantitativas para la valoración de opciones.

4. MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES

Podemos considerar en general dos modalidades de cambio en el capital a invertir, una de naturaleza determinista y otra estocástica. La determinista por definición corresponde al riesgo nulo, o sea cuando el capital es colocado a cierta tasa de interés. La estocástica en cambio actúa cuando efectuamos una inversión en un activo cuyo valor se rige por las leyes de la oferta y la demanda.

La parte determinista va a resultar más simple tratarla en el límite de recomposición continua del capital. Consideremos entonces cierta tasa de interés anual r, si llamamos S_i al capital inicial, al cabo de un año tendremos $S_i(1+r)$, claro que si recomponemos n veces en el año tendremos $S_i(1+r/n)^n$, si suponemos que se mantiene t años (donde t puede ser un número fraccionario cualquiera), el capital que tendremos será $S_i(1+\frac{1}{n/r})^{(n/r)\,r\,t}$, llamando ahora λ=n/r vemos que para la recomposición continua, o sea para $\lambda \longrightarrow \infty$, dado que

$$\lim_{\lambda\to\infty} (1+1/\lambda)^{\lambda} = e$$

resulta que un capital recompuesto en forma continua durante un período de t años evoluciona según

$$S(t)=S_i\, e^{r\,t} \qquad (1)$$

Podemos ver cuán buena es esta aproximación con un ejemplo: supongamos un capital de \$100 a un 10% de interés anual considerando el capital al cabo de un año para diferentes recomposiciones; para n=1 (recomposición anual) es \$110,00; para n=12 (recomposición mensual) es \$110,45; para n=52 (recomposición semanal) es \$110,51; para n=365 (recomposición diaria) es \$110,52. Si hacemos el cálculo utilizando ec. (1) es $100e^{0.1}$=\$110,52. Vemos que el límite aproxima apropiadamente a la recomposición diaria.

Resulta conveniente para lo siguiente hacer notar que la ec. (1) es solución de la ecuación diferencial

$$dS = r\, S\, dt \tag{2}$$

La ec. (2) va a ser uno de los términos que aparece en el modelo de Black-Scholes, completándose con un término de naturaleza estocástica (o probabilística).

4.1 Mediante el valor medio del valor intrínseco

Es la simple aplicación de la definición de valor medio de una variable aleatoria. Consideremos n valores posibles de S al tiempo de expiración T, los cuales indicamos con $S^{(k)}_T$, con k=1, 2,...,n atribuyéndoles probabilidades p_k, y sea X el precio de ejercicio para una CALL europea (el tratamiento para la PUT es análogo). El valor medio de la opción al tiempo de expiración T podemos calcularlo como

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \,(S_T^{(k)} - X)$$

Si suponemos que es posible depositar el dinero a una tasa anual r, como el pago de la opción se efectúa a la firma, si el tiempo de expiración es T, tendremos entonces

$$\overline{C} = \sum_{k=1}^{n} p_k \,(S_T^{(k)} - X)\, e^{-r\,T}$$

donde se ha asumido que se realiza una composición continua del valor $\overline{C}$ pagado a la firma del contrato. Lo difícil de establecer para aplicar este método es que valores $S^{(k)}_T$ puede tomar el precio del subyacente y con que probabilidad p_k.

4.2 Modelo Binomial

Este modelo fue propuesto por Cox-Ross-Rubinstein [2], el mismo permite estimar teóricamente el precio de opciones tanto europeas como americanas. Se construye un árbol binomial el cual va a representar los distintos "caminos" que puede seguir el precio del subyacente durante el período de vida de la opción. Son asumidas las siguientes hipótesis simplificatorias:

- *Invariancia de Mercado*; se supone que el volumen de operaciones en el mercado financiero es lo suficientemente grande como para no verse afectado por las operaciones que hagamos.

- *Imposibilidad de Arbitraje*; esto es que no hay posibilidades de generar dinero mediante negociaciones que impliquen la compra-venta de activos entre operadores. O sea que el mercado alcanzó un equilibrio dinámico (análogo al termodinámico) debido al conocimiento de los operadores de todas las posibilidades de negociación.

- *Simultaneidad de las Operaciones*; las operaciones de compra-venta de opciones y/u otros activos puede realizarse en forma simultanea.

- *Simetría en las Tasas de Interés*; se puede prestar y tomar prestado a las mismas tasas de interés.

- *Transacciones a Costo Nulo*; todas las transacciones pueden realizarse sin costo.

Trataremos, por simplicidad, con opciones europeas que no den dividendos. El siguiente tratamiento sigue principalmente la forma en que es presentado por Hull [3].

Llamemos S al precio del subyacente hoy y supongamos que al cabo del tiempo T el valor de S puede cambiar hacia arriba (up) en S.u o hacia abajo (down) en S.d, con u>1 y d<1. También consideremos el precio de la opción hoy como f y que el mismo puede cambiar a f_u o f_d. Esto lo podemos esquematizar en la forma

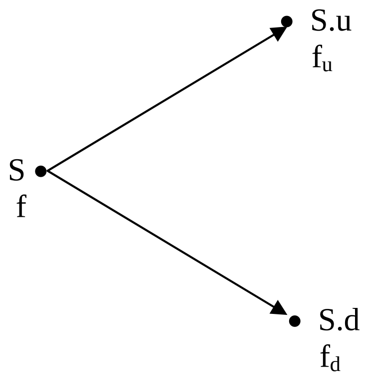


Fig. 3

La idea central en este modelo es hacer como construcción auxiliar un portfolio libre de riesgos, esto es que mantiene su valor independientemente de S, mediante la adecuada proporción de opciones y partidas de activos. Tomando el ejemplo de las referencias [1] y [3] construimos un portfolio de la forma:

Portfolio $\begin{cases} \text{venta de una opción CALL (short position)} \\ \text{compra de } \Delta \text{ acciones (long position)} \end{cases}$

Vamos a determinar el Δ tal que me deja invariante el valor del portfolio. Para fijar ideas veámoslo aplicado a un ejemplo concreto: Supongamos que un operador quiere saber cuanto debe valer una opción europea para comprar acciones de Repsol a X= \$16 de aquí a T= 3 meses, teniendo en cuenta que a la firma valen \$15 y sabiendo por cálculos de volatilidad (que veremos más adelante) que el valor a tres meses es muy probable que esté entre \$17 y \$13. Supongamos además que la tasa de interés es del 12% anual.

La principal suposición es que no existen posibilidades de arbitraje, con lo cual los portfolios a construir con los mismos activos deberán tener igual riesgo independientemente de cual sea el resultado al cabo de 3 meses.

El operador realiza entonces la siguiente construcción auxiliar de portfolio:

$$\textit{Portfolio}\;\left\{\begin{array}{l}\text{venta de una CALL europea con T= 3 meses y X= \$16}\\ \\ \text{compra de } \Delta \text{ acciones de Repsol.}\end{array}\right.$$

Si T es el tiempo de ejercicio el valor de la opción a dicho tiempo es su valor intrínseco, o sea C_T= máx[0, S_T – X] al cual llamaremos f_u o f_d según corresponda al valor más alto o al más bajo. El esquema de la fig. 3 será ahora:

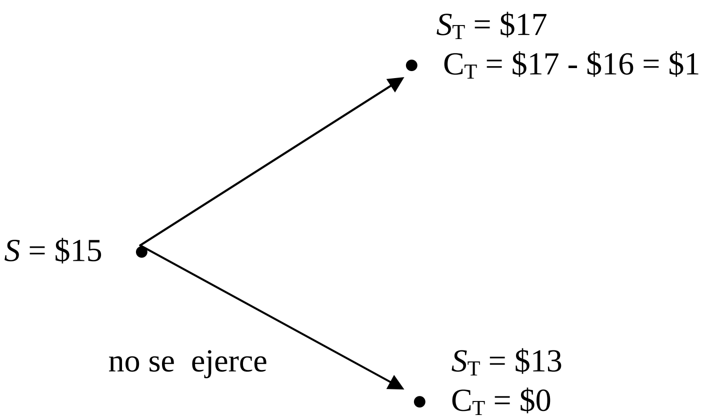


Fig. 4

Pedimos que el portfolio sea libre de riesgos, para lo cual se tiene que satisfacer que su valor sea independiente del valor que tengan el precio de las acciones a los tres meses. Llamando V_T al valor del portfolio, se tiene que satisfacer

$$V_T = S_T \,.\, \Delta - C_T = \text{constante}$$

(observar que el signo menos delante de C_T es porque justamente C_T es la cantidad que pierde el que vende la CALL, cuando el que la compra la ejerce). Numéricamente tenemos

$$V_T = 17\,\Delta - 1 = 13\,\Delta$$

resultando Δ = 0,25 y V_T = 13 x 0,25 = 3,25.

Pero lo que queremos conocer es el valor actual de la opción f (no a futuro), para ello tengamos en cuenta que el valor del portfolio libre de riesgos al tiempo actual es

$$V_0 = S.\Delta - f = V_T\, e^{-r\,T}$$

con r = 0,12 y T = 1/4 año. Reemplazando los números tenemos 15 x 0,25 – f = 3,25 x $e^{-(0,12\ \times\ 0,25)}$ = 3,154. O sea que el valor actual de la opción deberá ser:

$$f = \$0{,}596$$

Volvamos ahora al caso más general representado por la fig. 3, vamos a repetir el procedimiento, con lo cual la condición de riesgo nulo es

$$S.u.\Delta - f_u = S.d.\Delta - f_d$$

con lo cual el portfolio tiene un Δ tal que

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S.u - S.d} \tag{3}$$

El valor del portfolio al tiempo actual es

$$V_0 = (S.u.\Delta - f_u)\, e^{-r\,T} = S.\Delta - f \tag{4}$$

reemplazando (3) en (4) resulta

$$f = e^{-r\,T}\,[p\, f_u + (1 - p)\, f_d\,] \tag{5}$$

con

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \tag{6}$$

La ecuación (5) permite encontrarle significado a p; ésta nos da la probabilidad de que al tiempo T se transforme $S \rightarrow S.u.$

Podemos hallar el valor esperado del precio del subyacente al tiempo T. Si consideramos a p como la probabilidad de aumentar S su valor, el valor esperado (o esperanza matemática) de S_T es:

$$E(S_T) = p\, S.u + (1-p)\, S.d = p\, S.(u - d) + S.d \tag{7}$$

Reemplazando ecuación (6) en ecuación (7) resulta

$$E(S_T) = S\, e^{r\,T} \tag{8}$$

O sea que el valor medio se comporta como una inversión libre de riesgo.

Volviendo al ejemplo numérico tenemos u=17/15=1,133 y d=13/15 = 0,867, aplicando ec. (6) obtenemos p = 0,613.

Supongamos que en el ejemplo anterior consideramos un tiempo de expiración de 2T, con T = 3 meses, podemos entonces construir un árbol binomial de dos pasos como el de la fig. 5:

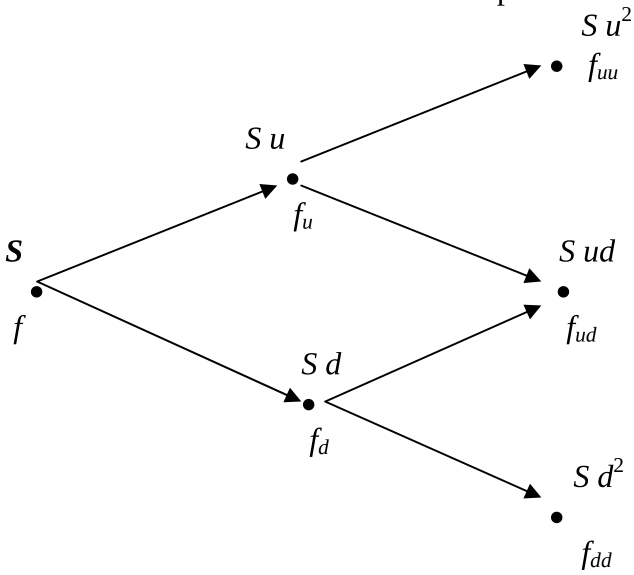


Fig. 5

Para efectuar el cálculo se utilizan las mismas hipótesis que en el ejemplo de un paso pero ahora en cada uno de los siguientes diagramas elementales

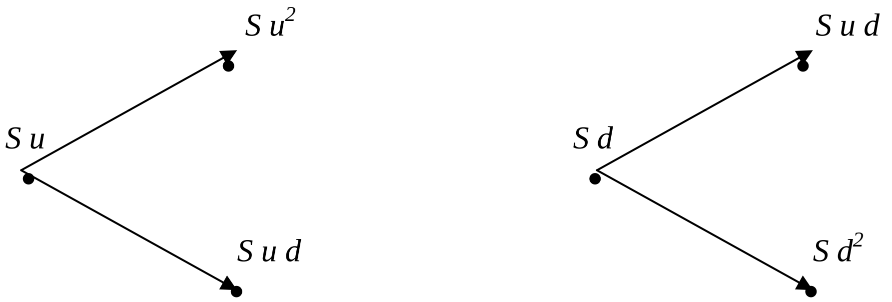


Fig. 6

Hallando

$$f_u = e^{-rT} [p f_{uu} + (1- p) f_{ud}] \tag{9}$$

$$f_d = e^{-rT} [p f_{ud} + (1- p) f_{dd}] \tag{10}$$

reemplazando ecs. (9) y (10) en ec. (5) resulta

$$f = e^{-2rT} [p^2 f_{uu} + 2 p (1- p) f_{ud} + (1- p)^2 f_{dd}] \tag{11}$$

donde para una opción CALL como la del ejemplo vale

$$f_{uu} = \text{máx}[0, S u^2 – X]; \quad f_{ud} = \text{máx}[0, Sud – X]; \quad f_{dd} = \text{máx}[0, Sd^2\text{-}X] \tag{12}$$

Para el ejemplo numérico considerado es

Su^2=19,267; Sud=14,733; Sd^2=11,266; con lo cual f_{uu}=3,267; f_{ud}=0 y f_{dd}=0. Como además es X=$16 al reemplazar en ecs. (10) y (9) resulta $f = e^{-2x0,12x0,25}(0,613)^2x3,267=1,156$, luego el precio de la opción es

$$f = \$\ 1,156$$

La aplicación a opciones PUT es similar al caso de las CALL con la única diferencia que cambia el signo del argumento en las expresiones (10), las cuales se pueden escribir en forma compacta englobando todos los casos:

$$f_{ij} = máx[0,(-1)^k (S.i.j - X)] \tag{13}$$

con $\quad i, j = u$ y/o $d \quad$ y $\; k = \begin{cases} 0 \text{ para CALL} \\ 1 \text{ para PUT} \end{cases}$

Este modelo se puede utilizar de manera similar con opciones americanas, simplemente se lo analiza a distintos niveles del árbol binomial viendo cuando resulta más conveniente ejercer la opción.

Tal como se destaca en la ref.[2], en la práctica, el tiempo de vida de la opción es dividido en 30 pasos o más. Con 30 niveles en el árbol binomial se tienen 2^{30} posibles caminos para definir el precio del subyacente esto hace que los cálculos demanden mucho tiempo de máquina, por lo que se introducen variantes que facilitan los cálculos (ver también ref. [1]).

Los valores de u y d necesarios para el cálculo se obtienen a partir de estimaciones de la volatilidad σ (a la cual nos referiremos más adelante) mediante las ecuaciones

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}\ ;\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{14}$$

donde Δt es el intervalo de tiempo elemental para pasar de un nivel al otro en el árbol binomial. La interpretación y justificación de las ecs, (14) la veremos al final de la próxima sección.

Podemos reescribir la ec. (11) en forma generalizada para opciones CALL y PUT como

$$f^{(k)} = e^{-2r\,\Delta t}\ \{\ p^2\ máx[0,(-1)^k\ (S\,u^2 - X)] + 2\,p\,(1-p)\ máx[0,(-1)^{(k)}\ (Sud - X)] + (1-p)^2\ máx[0,(-1)^{(k)}\ (Sd^2-X)]\ \} \tag{15}$$

con k=0,1 ; siendo $f^{(0)}$ = C y $f^{(1)}$ = P.

Se puede probar por inducción que la generalización a n niveles del valor de la opción es:

$$f^{(k)} = e^{-nr\Delta t}\left\{\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}\,máx[0,(-1)^k\left(u^j d^{n-j} S - X\right)]\right\} \tag{16}$$

siendo $n\Delta t = t$ el tiempo de "vida"de la opción, p es la probabilidad de que en un salto elemental el precio de stock crezca, la misma se calcula mediante la ec. (6). En el apéndice se muestra como el $\lim_{n\to\infty} f$ conduce a las ecuaciones del modelo conocido como de

Black-Scholes, a las cuales llegaremos en próxima sección.

4.3 Modelo de Black-Scholes

Antes de comenzar con el modelo conviene recordar a que se llama distribución normal (ver ref. [4]), es aquella cuya función densidad es de la forma

$$\Phi(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

(en lo que sigue se mostrará la variable x de manera explícita en Φ solo cuando sea necesario), con lo cual la esperanza matemática o media de una variable aleatoria ξ, que está distribuida según la ley normal, vale

$$E[\xi] = \mu$$

y la dispersión estándar

$$D[\xi] \equiv \sqrt{E[(\xi-\mu)^2]} = \sigma$$

• *Motivaciones provenientes de las ciencias naturales*

La principal motivación es lo que se conoce como movimiento Browniano; fue observado por primera vez en 1828 por el botánico Robert Brown, se trataba del movimiento errático de granos de polen suspendidos en agua, posteriormente Jean Perrin perfeccionó las observaciones obteniendo trayectorias tales como la mostrada en la fig. 7, la cual da la proyección horizontal de la trayectoria de un solo grano observada a intervalos iguales de tiempo. Se explicó su movimiento por el choque de las moléculas del líquido con los granos. La distribución de las proyecciones de las posiciones alcanzadas por los granos después de un intervalo de tiempo Δt según las direcciones x e y estaba descripta por una función densidad normal de la forma $\Phi(0,\sqrt{\lambda\Delta t})$, donde λ es la llamada constante de difusión. Mediante un modelo teórico es posible reproducir dicha función densidad bajo las siguientes suposiciones:

a) que la probabilidad de avance es igual a la de retroceso y por lo tanto con valor 1/2. Cada evento se considera independiente. La probabilidad de s avances en n eventos resulta

$$P(s,n)=\frac{n!}{s!\,(n-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) Para realizar el límite al continuo, o sea $n\to\infty$, se introduce un intervalo elemental de tiempo Δt y un intervalo espacial (salto) Δx, haciendo la hipótesis

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta x\to 0}} \langle \Delta x^2\rangle / \Delta t = \lambda \tag{17}$$

con λ la constante de difusión y $<\Delta x^2>$ el valor medio del cuadrado del salto.
Se llega entonces a que la probabilidad de que alcance al punto x_2 a partir del x_1 en el tiempo t es

$$P(x_1, x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x; 0, \sqrt{\lambda t})\, dx$$

La ecuación (17) es la que nos asegura el valor λt para la varianza, esto va a ser importante a la hora de interpretar que significa la volatilidad.

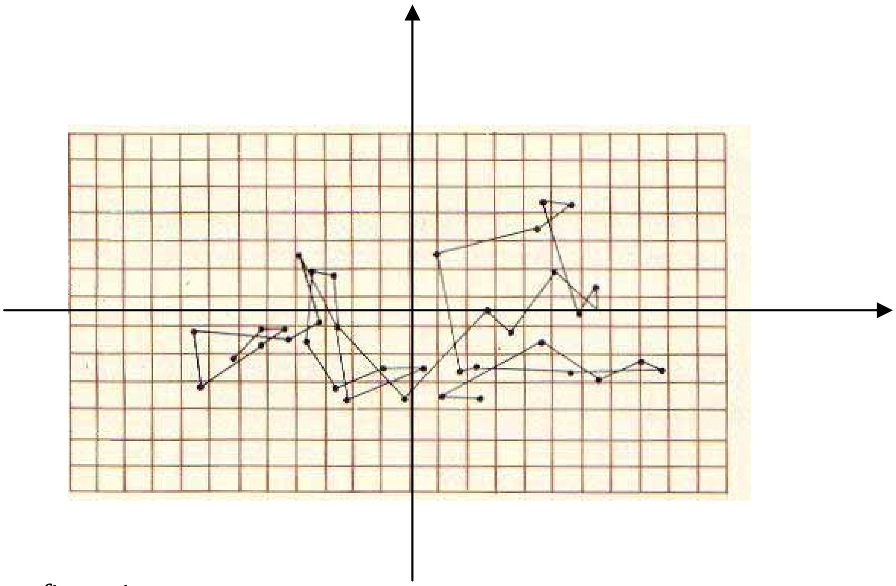


Fig. 7

• *Motivaciones financieras*

Por un lado el modelo binomial nos dice que $E[S_T] = S\, e^{r\,T}$, que la media de S_T se comporta como capital libre de riesgo. Además un capital libre de riesgo satisface la ecuación incremental $\Delta S/S = r\Delta t$. Black and Scholes en ref. [5] proponen que la variable
$\Delta x = \Delta S/S$ responda a un proceso de Wiener (generalización del movimiento Browniano), esto es

$$\Delta x = a\Delta t + b\xi\sqrt{\Delta t} \qquad (18)$$

el primer término da el comportamiento causal (tipo capital libre de riesgo) y el segundo la parte estocástica. Siendo ξ la variable estocástica a la cual se le atribuye una distribución normal cuya función densidad es $\Phi(0,1)$. O sea que la idea implícita en el modelo es que el precio S va a variar estocásticamente (con movimiento Browniano) en torno de un valor medio que evoluciona como un capital libre de riesgos (ver fig. 8).

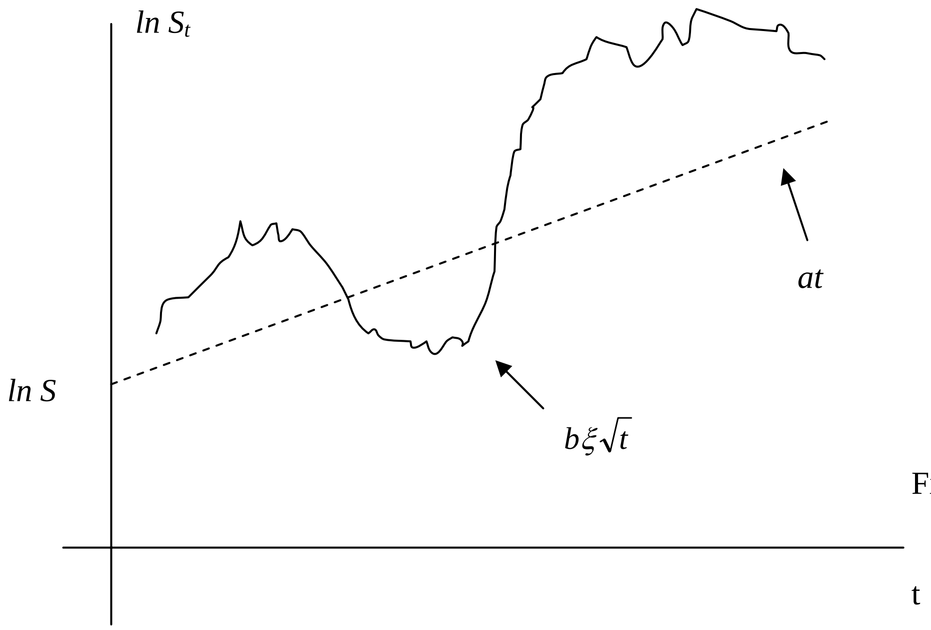


Fig. 8

Como se ve de ecuación (18) al hallar la media y la dispersión resulta

$$E[\Delta x] = a\,\Delta t$$

$$D[\Delta x] = b\,\sqrt{\Delta t}$$

con lo cual a = r y b = $\sqrt{\lambda}$ que en finanzas se lo llama volatilidad y se lo indica con σ. Tenemos entonces la ecuación

$$\frac{\Delta S}{S} = r\Delta t + \sigma\xi\sqrt{\Delta t}$$

un truco que resulta útil es llamar $\Delta z = \xi\sqrt{\Delta t}$ quedando

$$\frac{\Delta S}{S} = r\Delta t + \sigma\Delta z$$

en el límite para los incrementos tendiendo cero tenemos

$$dS = rSdt + \sigma Sdz \tag{19}$$

como $d\ln S = \frac{\partial \ln S}{\partial S} dS = dS/S$, podemos reescribir ec. (19) como

$$d \ln S = r dt + \sigma dz \tag{20}$$

éste es un caso particular de los procesos estocásticos llamados de Ito.

• *Proceso de Ito*

Es una generalización del proceso de Wiener, ahora los coeficientes son funciones de x y t, pudiéndose describir mediante la ecuación diferencial

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

con $a(x,t)$ conocida como tasa de deriva y $b(x,t)$ como tasa de varianza.

Vamos a enunciar ahora el llamado lema de Ito (su demostración puede verse en ref. [6]), el cual nos resultará útil para hallar la función densidad de S_T.

• *Lema de Ito*

Dada $G = G(x,t)$ función continua y derivable de la variable estocástica x y de t su diferencial se puede escribir se la forma

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \tag{21}$$

con lo cual G resulta ser una función de distribución con tasa de deriva dada por el término entre paréntesis del lado derecho de la ecuación (21) y tasa de varianza dada por el cuadrado del término que multiplica al dz.

Relacionando ahora las ecs. (20) y (21) y haciendo la correspondencia

$$x \longleftrightarrow S$$

$$a \longleftrightarrow r\,S$$

$$b \longleftrightarrow \sigma\,S$$

resulta

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} rS + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

llamando $G = \ln S$, entonces, dado que $\partial G / \partial t = 0$ queda:

$$d \ln S = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \tag{22}$$

o en forma incremental para un intervalo de tiempo T-t

$$\Delta \ln S = \ln S_T - \ln S_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) + \sigma\xi\sqrt{(T-t)} \tag{23}$$

la esperanza matemática es

$$E[\Delta \ln S] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) \tag{24}$$

y la varianza

$$D^2[\Delta \ln S] = \sigma^2 (T-t) \tag{25}$$

O sea la función $\Delta \ln S = \ln \frac{S_T}{S}$ toma valores según una función de densidad de distribución normal

$$\ln \frac{S_T}{S} \approx \Phi\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t} \right] \tag{26}$$

Usando las propiedades de la distribución normal, esta ecuación suele ponerse en la forma siguiente [6]:

$$\ln S_T \approx \Phi\left[\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t} \right] \tag{26'}$$

de allí que se afirme que S_T tiene distribución lognormal.

Una pregunta de interés es ¿cuál será la dispersión en términos de una tasa efectiva para el precio del subyacente?. Llamando r_e a la tasa efectiva (que se suele llamar tasa de retorno actual) tal que

$$S_T = Se^{r_e (T-t)} \tag{27}$$

despejando $$r_e = \frac{1}{T-t} \ln \frac{S_T}{S}$$

Como la esperanza matemática es un operador lineal

$$E[r_e] = \frac{1}{T-t} E[\ln \frac{S_T}{S}] = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

y la varianza queda

$$D^2[r_e] = \frac{1}{(T-t)^2} D^2[\ln \frac{S_T}{S}] = \frac{\sigma^2}{T-t}$$

con lo cual la tasa de retorno actual realizada en el período T-t tiene una distribución normal dada por

$$r_e \approx \Phi\left[r - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T-t}} \right] \tag{28}$$

Ejemplo:

Consideremos un stock con un retorno esperado del 17% anual y una volatilidad del 20% anual, ¿cuál es el valor medio y la dispersión de la tasa de retorno actual para un período de tres años?.

Como la tasa de retorno actual es una variable con distribución normal dada por la función densidad (28), tendrá un valor medio de $0{,}17-(0{,}2)^2/2$ = 0,15 o sea del 15% anual. Con una dispersión estándar $0{,}2/\sqrt{3}$ = 0,1155 o sea del 11,55% anual. Sabemos entonces, por tratarse de una distribución normal que tenemos una confiabilidad del 95% de que el retorno actual realizado en tres años esté entre 15+1,96x11,55 y 15-1,96x11,55%.

• *Tema pendiente*

Ahora es el momento oportuno para ver por que se propuso al aplicar el modelo binomial una relación particular entre los parámetros u y d y la volatilidad. La respuesta surge al utilizar la ecuación (26') bajo el supuesto que el intervalo de tiempo Δt es lo suficientemente pequeño como para despreciarse frente a $\sqrt{\Delta t}$, con lo cual la ec. (26') por ser normal nos dice que casi el 70% de los valores de $\ln S_{\Delta t}$ van a estar entre $\ln S+\sigma\sqrt{\Delta t}$ y $\ln S-\sigma\sqrt{\Delta t}$. Por otro lado teníamos

$$S_{\Delta t} = \begin{cases} S.u \\ S.d \end{cases}$$

con lo cual

$$\ln S_{\Delta t} = \begin{cases} \ln S + \ln u \\ \\ \ln S + \ln d \end{cases}$$

Ahora entonces vemos que significa la propuesta, ya que si hacemos $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ resulta

$$\ln S_{\Delta t} = \ln S \pm \sigma\sqrt{\Delta t} \tag{29}$$

O sea se está eligiendo como valores posibles aquellos dados por la dispersión estadística proveniente de la distribución normal representada por la ec. (26') bajo la aproximación de intervalo temporal pequeño (podría ser por ejemplo un mes, en cuyo caso valdría 1/12).

• *Cálculo de la Prima*

Nos falta hallar el valor de una opción mediante el modelo de Black-Scholes. Para ello se supone que a la firma puede considerarse como el valor que puesto a una tasa de interés libre de riesgo nos da a la expiración la esperanza matemática del valor intrínseco. Esto sabemos que vale ya que a la expiración la prima coincide con el valor intrínseco y por ende con la media. A medida que nos alejamos de la expiración aparece "el ruido" y ya no tiene por que coincidir con el valor intrínseco. La fórmula propuesta para opciones CALL europeas es entonces

$$C = e^{-r(T-t)} E[máx(0, S_T - X)] \tag{30}$$

que para llevarla a una forma utilizable se calcula mediante

$$E[máx(0, S_T - X)] = \int_{S_T}^{\infty} (S_T - X)\, g(S_T)\, dS_T$$

siendo $g(S_T)$ la densidad de probabilidad para S_T la cual se puede obtener a partir de la ec. (26'). Luego integrando y después de tediosa álgebra se llega a

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{31}$$

donde $N(x)$ es la función de distribución normal (la cual aparece calculada en tablas), cuya definición es

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x'} \Phi(x'; 0,1)\, dx'$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

en forma análoga se deduce para las opciones PUT

$$P = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{32}$$

En el apéndice se muestra como se deducen las ecs. (31) y (32), conocidas como de Black-Scholes, a partir del modelo binomial.

Hasta aquí vemos que con los modelos presentados se pueden estimar el precio del subyacente al tiempo T, que llamamos S_T y las primas para opciones CALL y PUT, siempre y cuando nos den un valor de la volatilidad σ por lo tanto es éste un parámetro crucial a ser estimado.

5. CÁLCULO DE LA VOLATILIDAD

Existen una gran cantidad de métodos para calcular la volatilidad, en la ref. [7] se presenta un cuadro bastante completo. En el presente artículo consideraremos un ejemplo representativo de los *modelos de promedio movil* , en particular veremos el cálculo de *volatilidad histórica* y un ejemplo de los *modelos basados en las expectativas del mercado* en particular el cálculo de la *volatilidad implícita*.

5.1 Volatilidad Histórica

La idea es que los cambios en los precios en condiciones normales tienen que mantener cierta regularidad. Podemos asumir que los cambios futuros no van diferir mucho de los precedentes. Vamos entonces a definir una magnitud que nos de el cambio de precio al pasar un intervalo de tiempo Δt:

$$u_t \equiv \ln \frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}$$

la misma se conoce como rendimiento periódico del subyacente. Sabemos que esta cantidad toma valores próximos a una distribución normal dada por la ec. (26), o sea

$$u_t \approx \Phi[\bar{u}, \sigma\sqrt{\Delta t}\,]$$

con $\bar{u}$ el valor medio de *u*. Podemos entonces calcular el valor medio y la varianza, con los datos correspondientes a un intervalo de tiempo inmediatamente anterior al actual, usando las definiciones e igualando luego a los argumentos de la fórmula anterior. Para hacer más sencillo el cálculo utilizaremos Δt=1 (que puede ser un día) con lo cual para n períodos tenemos:

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t$$

$$D^2[u] = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(u_t - \bar{u}\right)^2 = \sigma^2 \Delta t = \sigma^2 \qquad (33)$$

En la última ecuación se divide por n-1 ya que hay n-1 términos distintos de cero en la suma, ya que para n=1 vale cero. El σ que obtenemos en ec. (33) es para período diario si quisiéramos utilizarla con período anual, teniendo en cuenta sólo días hábiles Δt=252 y entonces $\sigma_{anualizada} = \sqrt{252}\sigma_{diaria}$.

4.2 Volatilidad Implícita

Este cálculo está basado en la ecuación (31). La idea es que el mercado más allá de nuestros cálculos opera con determinado valor para las primas de las opciones, entonces podemos utilizar ese valor en la ecuación (31) o la (32) y determinar cual es la volatilidad σ que la satisface. O sea que se trata de resolver el problema inverso, dado el valor de la opción hallar la volatilidad. Debido a la complejidad de estas ecuaciones no es posible despejar en forma analítica el valor de σ, es por ello que se emplean métodos numéricos que permiten, mediante el uso de computadoras, hallar el valor más próximo a la solución. El método más utilizado es el conocido como de Newton-Raphson. Dicho método permite resolver una ecuación de tipo $f(x)=0$. Se comienza con un valor conveniente $x=x_0$ (no demasiado lejano de la solución, determinado mediante alguna aproximación burda), entonces se estima la solución por sucesivas mejoras $x=x_1$, $x=x_2$,...., usando la ecuación

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

5. ESTRATEGIAS FINANCIERAS CON OPCIONES (SPREADS)

Teniendo un criterio para estimar el precio a futuro de un activo (S_T) y el valor de las primas para opciones CALL y PUT, podemos proceder a operar financieramente. La forma que lo suelen hacer las instituciones financieras es mediante la compra y venta de opciones en forma combinada de manera de cubrirse lo mejor posible, en especial en mercados con alta volatilidad. A este tipo de estrategias se las llama “spreads”. Podemos adoptar como definición la propuesta por Lamothe [1]: “Una estrategia de spread la podemos definir como la asunción de un riesgo sobre la diferencia de dos precios”.

Veamos algunos de los ejemplos más comunes:

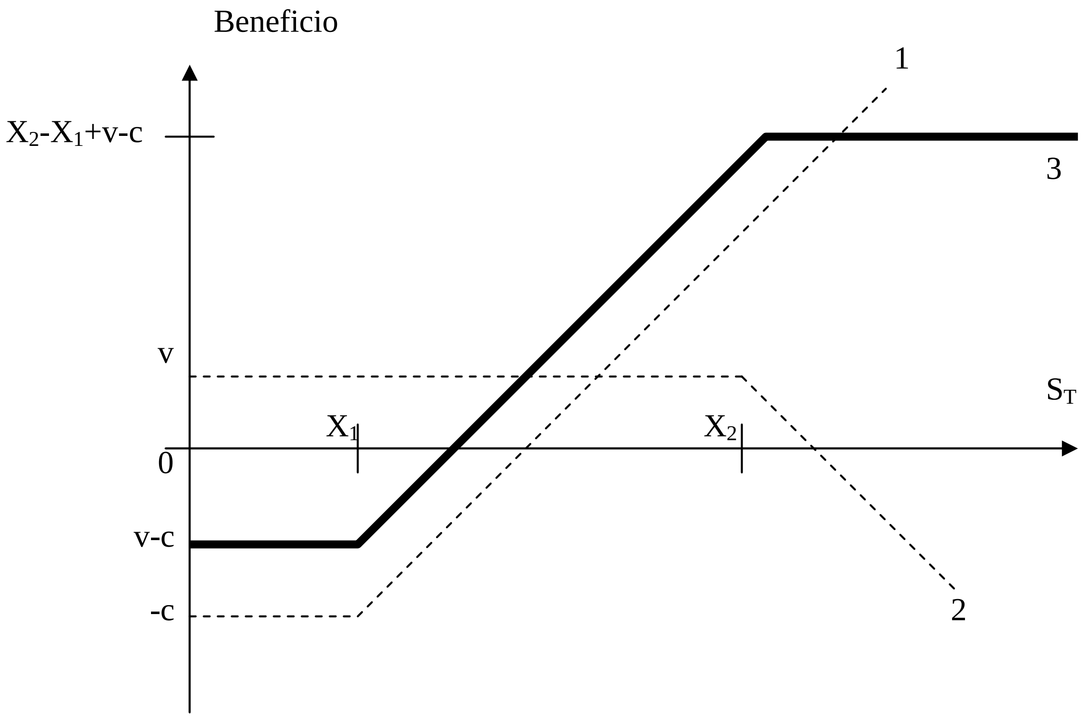
6.1 Bull spread

Es un spread de tipo alcista, en el cual se especula con la posibilidad de crecimiento del precio del subyacente. Pueden utilizarse opciones CALL o PUT:

Composición

- La compra (a precio c) de una opción CALL europea sobre un stock con precio de ejercicio X_1.
- La venta (a un precio v) de una opción CALL europea sobre el mismo stock con un precio mayor X_2.

Podemos ver en el siguiente gráfico el beneficio vs S_T:



1- Corresponde a la compra de la CALL (long position)
2- Venta de la CALL (short position)
3- Es la resultante de superponer 1 y 2.

En la tabla siguiente se ve el detalle del cálculo

Rango del precio de stock	beneficio en la compra (1)	beneficio en la venta (2)	beneficio del spread (3)
$S_T \leq X_1$ no se ejercen	-c	v	v-c
$X_1 < S_T < X_2$ se ejerce (1)	$S_T - (c + X_1)$	v	$S_T - X_1 + v - c$
$S_T \geq X_2$ se ejercen ambas	$S_T - (c + X_1)$	$X_2 - S_T + v$	$X_2 - X_1 + v - c$

Tal como expresáramos en la definición de spread, resulta ahora notorio como esta estrategia se basa en especular sobre la diferencia entre dos precios de ejercicio. Como se trata de una expectativa alsista la venta se realiza sobre un precio de ejercicio mayor.

Según como sea la relación entre el precio de ejercicio y el precio de stock (S) al momento de hacer el acuerdo, tendremos una posición más o menos conservadora. Usando la terminología habitual diremos que una opción CALL está *en el dinero* si X=S, *dentro del dinero* si X<S y *fuera del dinero* si X>S. Tendremos entonces las siguientes situaciones para el bullspread anterios:

i) Ambas opciones call inicialmente fuera del dinero.
ii) Una inicialmente en el dinero y la otra inicialmente fuera del dinero.
iii) Ambas inicialmente en el dinero.

La estrategia i) es la más agresiva, ya que si bien reduce el costo inicial al estar fuera del dinero, disminuye la chance de ganar ya que el precio de stock tiene que crecer mucho para que sea ejercida. Es una estrategia a tomar cuando la volatilidad implícita se aleja mucho de la histórica, o sea que la expectativa es un escenario de alta volatilidad. La estrategia ii) es una situación intermedia y la iii) es la más conservadora.

También se puede realizar un bullspread con opciones PUT, sin embargo como lo indica Hull [3] los beneficios totales resultan siempre inferiores a los de las CALL.

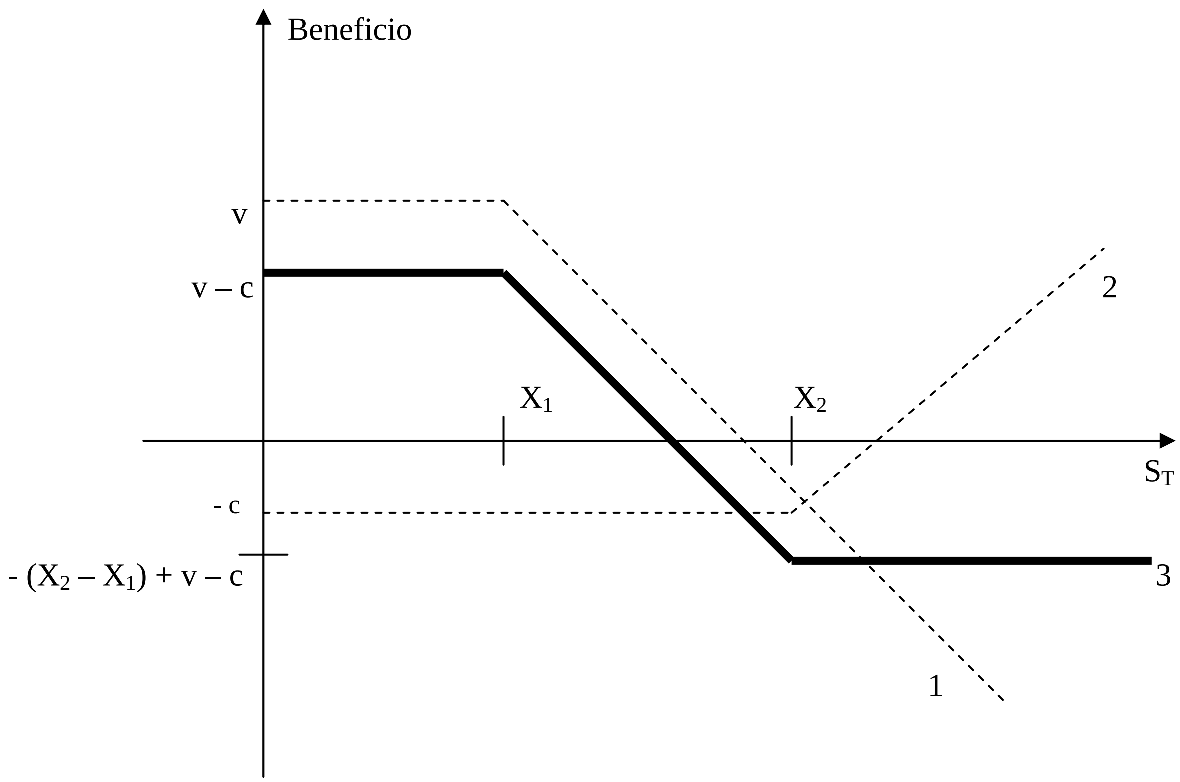
6.2 Bear spread

Se especula con que el precio del subyacente baje, es entonces la expectativa contraria al caso anterior.

Composición

- La venta de una CALL con precio de ejercicio X_1.
- La compra de una CALL sobre el mismo subyacente a un precio de ejercicio $X_2 > X_1$.

Como la expectativa es a que baje el precio de stock, tiene entonces más valor la opción con menor precio de ejercicio luego v > c. El gráfico tendrá la siguiente forma:



1- Corresponde a la venta de la CALL (X_1)
2- La compra de la CALL (X_2)
3- La superposición de 1 y 2.

En la siguiente tabla se detalla el cálculo:

Rango del precio de stock	beneficio en la venta (1)	beneficio en la compra (2)	beneficio del spread (3)
$S_T \leq X_1$ no se ejercen	v	- c	v-c
$X_1 < S_T < X_2$ (1) es ejercida	$X_1 - S_T + v$	-c	$X_1 - S_T + v - c$
$S_T \geq X_2$ ambas se ejercen	$X_1 - S_T + v$	$S_T - X_2 - c$	$X_1 - X_2 + v - c$

Esta estrategia también se puede hacer con opciones PUT. Respecto a la estrategia anterior lo que se hizo fue invertir las magnitudes relativas de los precios de ejercicio, siendo mayor para la compra que para la venta.

6.3 Butterfly Spread

Finalmente aquí vemos una estrategia que combina tres operaciones, la cual es motivada por expectativas de baja volatilidad. El máximo beneficio se concentra muy cerca de un dado valor de precio, teniendo baja pérdida cuando esto no se cumple.

Composición

- Compra de una CALL (c_1) con bajo precio de ejercicio X_1.
- Compra de una CALL (c_2) con alto precio de ejercicio X_3.
- Venta (v) de dos CALL con precio de ejercicio intermedio X_2 (próximo al precio de stock).

Como los valores de precio tienen distribución simétrica podemos considerar que

$$X_2 = (X_1 + X_3)/2$$

Entonces resulta el siguiente gráfico de beneficio vs S_T:

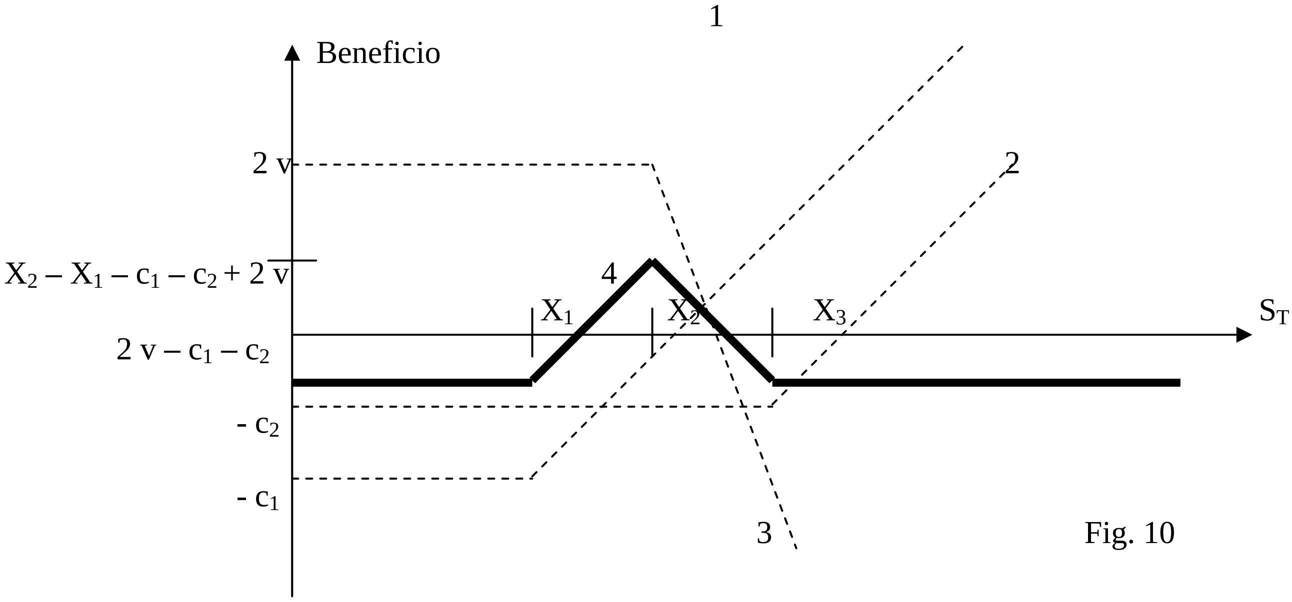


Fig. 10

El cálculo se realiza según la siguiente tabla:

Rango del precio de stock	beneficio en la compra (1)	beneficio en la compra (2)	beneficio en la venta (3)	beneficio del spread (4)
$S_T \leq X_1$ no se ejercen	$-\,c_1$	$-\,c_2$	$2\,v$	$2\,v - c_1 - c_2$
$X_1 < S_T < X_2$ se ejerce (1)	$S_T - X_1 - c_1$	$-c_2$	$2\,v$	$S_T - X_1 + 2v - c_1 - c_2$
$X_2 < S_T < X_3$ (1)y(3)son ejercidas	$S_T - X_1 - c_1$	$-\,c_2$	$2(X_2 - S_T) + 2\,v$	$X_3 - S_T + 2v - c_1 - c_2$
$S_T > X_3$ se ejercen todas	$S_T - X_1 - c_1$	$S_T - X_3 - c_2$	$2(X_2 - S_T) + 2\,v$	$2\,v - c_1 - c_2$

O sea una situación muy favorable sería $X_1 = X_2 - 1{,}96\,\sigma\sqrt{T}$ y $X_3 = X_2 + 1{,}96\,\sigma\sqrt{T}$, con lo cual esperaríamos, de acuerdo a la ley de distribución para los precios, que con un 95% de posibilidad el precio tuviese ese valor al cabo del tiempo T. Se pone de manifiesto otra vez vemos la importancia de estimar lo mejor posible la volatilidad.

6. COMENTARIOS FINALES

La búsqueda de funciones de distribución, que permitan un mejor ajuste, de la evolución de los precios para distintas especies financieras da lugar a diversas investigaciones que siguen muy de cerca a resultados obtenidos en el campo de la física. Así por ejemplo Mantegna y Stanley [8] mediante el estudio a diferentes escalas de tiempo de la distribución de precios del índice de Standard & Poor 500 encuentran que dicha distribución puede describirse por un proceso no Gaussiano con dinámica que, en la parte central de la distribución, corresponde al que predice un modelo de proceso tipo Lévy estable. Ésto tiene que ver con la hipótesis usada para describir el movimiento Browniano dada por la ecuación (17), esta condición puede ser relajada introduciendo un parámetro μ de manera que el salto elemental se relacione con el temporal en la forma

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{<\Delta x^2>}{\Delta t^{\mu}} = \lambda$$

cuando $\mu = 1$ tenemos el movimiento Browniano el cual nos da una distribución Gaussiana, $\mu \neq 1$ nos da estadísticas no Gaussianas algunas de las cuales pueden ser descriptas por ecuaciones deterministas no lineales con comportamiento caótico (ver ref. [9]).

En un trabajo reciente Eguíluz y Zimmermann [10] profundizan los mecanismos por los cuales se producen cambios de opinión en un mercado de activos financieros, provocando a su vez cambios en los precios de stock, estos autores mediante un modelo estocástico muestran como crece la información a través de una red que conecta cúmulos (clusters) de operadores quienes actúan de acuerdo a las noticias y esperan por el próximo rumor . El modelo predice una fluctuación en los precios similar a la de los mercados reales. Esta es una linea de investigación muy interesante para ser continuada en la búsqueda de formas más precisas de evaluar la volatilidad, que como vimos es el parámetro fundamental en la elaboración de estrategias con opciones.

APÉNDICE:

Límite del modelo binomial al de Black-Scholes [2]

Consideremos la ecuación (15) para opciones CALL. Los términos en la sumatoria van a ser distintos de cero a partir de cierto valor de j, llamémoslo *a* tal que

$u^j d^{n-j} > X$

para todo j ≥ *a*

quedando ec. (15) en la forma

$$C = e^{-nr\Delta t}\left\{\sum_{j=a}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}\left(u^j d^{n-j}S - X\right)\right\} \tag{34}$$

llamando $\gamma \equiv e^{r\Delta t}$, usando además la condición de portfolio libre de riesgo dada por ec. (6):

$p = \dfrac{\gamma - d}{u - d}$

llamando además

$$p' \equiv \frac{u}{\gamma}p \tag{35}$$

al reemplazar en la condición de riesgo nulo queda

$$1 - p' = \frac{d}{\gamma}(1-p) \tag{36}$$

definiendo además

$$Z(a;n,p) \equiv \sum_{j=a}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j} \tag{37}$$

usando ecs. (35), (36) y (37) en (34) nos queda

$$C = SZ(a;n,p') - X\gamma^{-n}Z(a;n,p) \tag{38}$$

para calcular la expresión de la PUT basta con usar la ecuación de paridad put-call, la misma se obtiene de pedir que no existan posibilidades de arbitraje entre dos portfolios con el mismo valor al tiempo de expiración (ver ref. [4]). La ecuación es:

$$C + Xe^{-r(T-t)} = P + S \tag{39}$$

Haciendo el límite al continuo

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}} n\Delta t = T - t$$

siendo entonces

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}} Z(a;n,p') = N(d_1)$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}} Z(a;n,p) = N(d_2)$$

con N(x) la función de distribución normal, y d_1 y d_2 las mismas que en la ecuación (31) la cual es reobtenida

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{40}$$

reemplazando ec. (39) obtenemos

$$P = Xe^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - S(1 - N(d_1))$$

usando que N(-x)=1-N(x) podemos rescribir

$$P = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{41}$$

Siendo (40) y (41) las ecuaciones de Black –Scholes.

REFERENCIAS

[1] Lamothe, Prosper; “Opciones Financieras: un enfoque fundamental”, Mc Graw Hill (1993).
[2] Cox, J.C.; Ross, S.A., and Rubinstein, M.: “Option pricing: a simplified approach”, Journal of Financial Economics, **7**, (October 1979) 229-264.
[3] Hull, John C.; “Introduction to futures and option markets”, Prentice Hall, second edition (1995).
[4] Ríos, Xisto: “Métodos Estadísticos”, Mc. Graw-Hill (1967).
[5] Black, Fischer; and Scholes, Myron: “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Journal of Political Economy, **81** (May-June 1973).
[6] Hull, John C.; “Options, Futures, and Other Derivatives”, Prentice Hall, third edition (1997).
[7] Varikooty, A.P.; Liu, John; and Huang, Harry; “Predictive Ability of Different Volatility Forecasting Techniques”, Risk Management for Financial/Risk Publications (1997).
[8] Mantenga, Rosario N. and Stanley, Eugene H.: “Scaling behaviour in the dynamics of an economic index”, Nature, Vol. 376, 6 July 1995.
[9] Shlesinger, Michael F.; Zaslavsky, George M. and Klafter Joseph: “Strange kinetics”, Nature, Vol. 363, 6 May 1993.
[10] Eguíluz, Víctor M. and Zimmermann, Martín G.: “Transmission of information and Herd Behavior: An Application to Finantial Markets”, Physical Review Letters, Vol. 85, Nunber 26, (25 December 2000).